Séance de travaux pratiques III

Le jeudi 30 janvier 2020

1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \sqrt{1+4x^2z^2}ds$, où $\mathcal{C}$ est la courbe donnée par l'intersections des surfaces d'équations $x^2+z^2=1$ et $y=x^2$.
2. Trouver la masse et le centre de masse d'un file ayant la forme de l'hélice $x=\cos t$, $y=\sin t$ et $z=t$ pour $t\in[0,2\pi]$ si la densité de masse linéaire du file au point (x,y,z) est z.
3. Dans les coordonnées polaires, considérons les champs de vecteurs $\hat{r}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}$ et $\hat{\theta}=-\sin\theta\mathbf{i}+\cos\theta\mathbf{j}$.
   (a) Représenter ces champs de vecteurs dans le plan.
   (b) Montrer qu'en coordonnées polaires, le gradient d'une fonction φ prend la forme
   $$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta}.$$
   (c) Montrer qu'en coordonnées polaires, une condition nécessaire (mais pas nécessairement suffisante) pour qu'un champ vectoriel $\vec{F}(r,\theta)=F_r(r,\theta)\hat{r}+F_\theta(r,\theta)\hat{\theta}$ soit conservatif est que
   $$\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-r\frac{\partial F_\theta}{\partial r}=F_\theta.$$
4. Évaluer $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}}(x^2y^2dx+x^3ydy)$ si $\mathcal{C}$ est le carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$ parcouru dans le sens anti-horaire.
5. On considère le champ vectoriel $\vec{F}=(axy+z)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+(bx+2z)\mathbf{k}$ où a et b sont des constantes.
   (a) Trouver a et b pour que $\vec{F}$ soit conservatif.
   (b) Pour les choix de a et b ci-haut, trouver un potentiel pour $\vec{F}$.
   (c) Calculer la circulation $\displaystyle\int_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ si $\mathcal{C}$ est la courbe partant de $(1,1,0)$ et se terminant en $(0,0,3)$ donnée par l'intersection des surfaces d'équations $2x+y+z=3$ et $9x^2+9y^2+2z^2=18$ dans le premier octant.
6. Évaluer les intégrales $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}}xdy$ et $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}}ydx$ le long de la courbe fermée $\mathcal{C}$ parcourue dans le sens anti-horaire si :
   (a) $\mathcal{C}$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
   (b) $\mathcal{C}$ est le carré ayant pour sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$.
7. Trouver l'aire de la partie de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=4a^2$ contenue à l'intérieur du cylindre d'équation $x^2+y^2=2ay$.