Séance de travaux pratiques IV

Le jeudi 6 février 2020

1. Calculer $\int_{\mathcal{S}} xyz dS$ si $\mathcal{S}$ est la partie du plan d'équation $x + y + z = 1$ contenue dans le premier octant.
2. Soit $\mathcal{S}$ la surface donnée par la partie du cylindre d'équation $y^2 + z^2 = 16$ contenue dans le premier octant entre les plans d'équations $x = 0$ et $x = 5$. Déterminer le flux de $\vec{F}(x, y, z) = 3z^2x\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ sur $\mathcal{S}$ pour le champ normal unitaire pointant vers l'axe des x.

   Calculer $\nabla \cdot \vec{F}$ et $\nabla \times \vec{F}$ pour les champs vectoriels suivants :
   (a) $\vec{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$;
   (b) $\vec{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$.
3. Démontrer les identités suivantes pour φ et ψ des fonctions et $\vec{E}$ et $\vec{F}$ des champs vectoriels :
   (a) $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{F}) = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{F} - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{F})$;
   (b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta\vec{F}$, où $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ est le laplacien ;
   (c) $\nabla \times (\varphi\nabla\psi) = -\nabla \times (\psi\nabla\varphi) = \nabla\varphi \times \nabla\psi$.
4. Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel (lisse) sur $\mathbb{R}^3$ qui soit à la fois incompressible et irrotationnel. Montrer alors que ses composantes F_1, F_2 et F_3, sont harmoniques, c'est-à-dire que $\Delta F_i = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
5. La loi de Coulomb nous dit que la force électrique $\vec{F}$ exercée sur une charge électrique q située en $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ par une autre charge électrique Q située à l'origine est donnée par

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}, \quad \text{où} \quad r = |\vec{r}|,\ \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

   et ϵ_0 est la permittivité du vide (une constante universelle). En particulier, les deux charges s'attirent si elles sont de signes opposés, mais se repoussent si elles sont de même signe.
   (a) Le champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$ donne la force électrique $\vec{F}_q(x, y, z)$ exercée sur une charge q située en (x, y, z) : $\vec{F}_q(x, y, z) := q\vec{E}(x, y, z)$. Montrer que le champ électrique engendrée par une charge Q située à l'origine est donné par $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$.
   (b) Montrer que le flux du champ électrique précédent à travers une sphère de rayon R centrée à l'origine avec champ normal unitaire pointant vers l'extérieur ne dépend pas du rayon et est donné par $\frac{Q}{\epsilon_0}$.

(c) Plus généralement, lorsque la charge électrique est distribuée continûment dans l'espace, on a que $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ où ρ est la densité volumique de charge. Dans ce cadre, expliquer comment le théorème de la divergence nous donne la loi de Gauss : la charge électrique totale contenue à l'intérieur d'une surface fermée $\mathcal{S}$ est donnée par $\epsilon_0 \displaystyle\oint_{\mathcal{S}} (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS$ avec $\hat{n}$ le champ normal unitaire pointant vers l'extérieur. En particulier, il suffit de connaître le champ électrique $\vec{E}$ sur $\mathcal{S}$ (sans «ouvrir» $\mathcal{S}$) pour connaître la charge électrique totale contenue à l'intérieur de $\mathcal{S}$.

(d) Quelle est la charge totale à l'intérieur d'une surface fermée orientée $\mathcal{S}$ si le champ électrique est tangent à $\mathcal{S}$ partout sur $\mathcal{S}$?

(e) Une charge électrique est distribuée uniformément avec densité ρ_0 dans une boule de rayon R centrée à l'origine. Déterminer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la boule à partir de l'équation $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ en sachant que la solution, vu la symétrie du problème, est invariante par rotation. Vérifier que la solution est bien compatible avec la loi de Gauss appliquée à des sphères de rayon $a > 0$ centrées à l'origine.

6. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux circuits électriques le long de courbes fermées paramétrées par $\vec{r}$ et $\vec{r}\,'$ et de courants électriques I et I' respectivement. Alors, d'après la loi d'Ampère, la force magnétique exercée par $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\vec{F}_{\mathcal{C}' \to \mathcal{C}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}'} \frac{I d\vec{r} \times (I' d\vec{r}\,' \times \hat{R})}{R^2}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,',\ R = |\vec{R}|,\ \hat{R} = \frac{\vec{R}}{R},$$

où μ_0 est la constante de perméabilité du vide (constante universelle). Autrement dit, si on définit le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ induit par $\mathcal{C}'$ par

$$\vec{B}(\vec{r}) := \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}'} \frac{I' d\vec{r}\,' \times \hat{R}}{R^2},$$

alors la force magnétique exercée sur $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\vec{F}_{\mathcal{C}' \to \mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} I d\vec{s} \times \vec{B}(\vec{r}).$$

(a) Supposons que $\mathcal{C}'$ soit l'axe des z au complet et que le courant I' se dirige vers le haut. Montrer alors que le champ magnétique qu'il induit est en coordonnées cylindriques (r, θ, z) donné par $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I'}{2\pi r}\hat{\theta}$, où $\hat{\theta} = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}$.

(b) Montrer que la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ du problème précédent le long d'un cercle de paramétrisation $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$ pour $t \in [0, 2\pi]$ et $a > 0$ est précisément $\mu_0 I'$. C'est une version intégrale de la loi d'Ampère : la circulation de $\vec{B}$ le long d'une boucle bordant un surface $\mathcal{S}$ (le disque de rayon a dans notre exemple) donne le courant électrique passant à travers cette surface.

(c) En utilisant la description du rotationnel comme une limite de circulations le long de cercles, réinterpréter la loi d'Ampère de la façon suivante : $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ où $\vec{J}$ est le champ vectoriel correspondant à la densité de courant électrique (le flux de $\vec{J}$ sur une surface $\mathcal{S}$ donne le courant électrique passant à travers celle-ci).