Séance de travaux pratiques VI

Le jeudi 5 mars 2020

1. Évaluer $\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$, où $\mathcal{S}$ est la surface d'équation

$$x^2 + +y^2 + 2(z-1)^2 = 6, \quad z \geq 0,$$

$\hat{n}$ est le champ normal unitaire sur $\mathcal{S}$ pointant vers le haut et

$$\vec{F} = (xz - y^3 \cos z)\mathbf{i} + x^3 e^z \mathbf{j} + xyze^{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}.$$

2. Évaluer $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\vec{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ si

$$\vec{F} = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (e^y + x^3)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}.$$

Indice : la courbe $\mathcal{C}$ est contenue dans la surface d'équation $z = 2xy$.

3. Soit $\mathcal{C}$ une courbe fermée contenue dans un plan de vecteur normal unitaire $\hat{n} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$. Supposons que $\mathcal{C}$ soit orientée positivement par rapport à l'orientation du plan. Montrer que l'aire de la région du plan circonscrite par $\mathcal{C}$ est donnée par

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz.$$

4. Si $\vec{F} = -z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, quelles sont les valeurs possibles de $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ pour $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $\mathbf{a}$ dans le plan d'équation $2x + y + 2z = 7$?

5. Le long de quelle courbe fermée $\mathcal{C}$ dans le plan xy parcourue dans le sens anti-horaire la circulation $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est-elle maximisée si $\vec{F} = (2y^3 - 3y + xy^2)\mathbf{i} + (x - x^3 + x^2y)\mathbf{j}$?

6. Trouver la valeur maximale de la circulation $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si $\mathcal{C}$ est une courbe fermée dans le plan $x + y + z = 1$ parcourue dans le sense anti-horaire lorsque vue de haut par rapport à l'axe des z et $\vec{F} = xy^2\mathbf{i} + (3z - xy^2)\mathbf{j} + (4y - x^2y)\mathbf{k}$. Pour quelle courbe $\mathcal{C}$ le maximum est-il atteint ?

7. (Poussée d'Archimède) Un solide occupant une région $\mathcal{R}$ de surface $\mathcal{S}$ est immergé dans un liquide de densité δ. Dans ce cas, à cause de la gravité, la pression p dans le liquide est de la forme $p = -\delta gh + c$ où c est une constante (la pression à un niveau fixé), g est l'accélération due à la force gravitationnelle et h est la hauteur par rapport à ce niveau. En particulier, on a que $\nabla p = \delta\vec{g}$ où $\vec{g}$ est le vecteur (constant) donnant l'accélération due à la force gravitationnelle de la Terre. Sur chaque élément de surface dS de $\mathcal{S}$, la force

exercée par la pression du liquide est $-p\hat{n}dS$ où $\hat{n}$ est le champ normal unitaire pointant vers l'extérieur du solide. La force totale exercée par la pression sur le solide est donc

$$\vec{P}_A = -\int_{\mathcal{S}} p\hat{n}dS.$$

En utilisant la version vectorielle du théorème de la divergence impliquant le gradient d'une fonction (vue dans le cours), montrer que cette force, la poussée d'Archimède, peut se réécrire (Eurêka !)

$$\vec{P}_A = -\delta\vec{g}\int_{\mathcal{R}} dV = -\delta\vec{g}\,\mathrm{vol}(\mathcal{R}).$$