Séance de travaux pratiques VII

Le jeudi 12 mars 2020

1. Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
2. Soit $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Soit $d\Omega_{n-1}$ la forme d'hyper-aire sur $\mathbb{S}^{n-1}$ et soit A_{n-1} l'hyper-aire totale de $\mathbb{S}^{n-1}$, de sorte que

$$A_{n-1} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\Omega_{n-1}.$$

Par exemple, lorsque $n = 3$, $d\Omega_2 = \sin\varphi d\varphi d\theta$ en coordonnées sphériques.

(a) En intégrant sur $\mathbb{R}^n$ en utilisant la méthode des coquilles sphériques, montrer que

$$(\sqrt{\pi})^n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\sum_{i=1}^n x_i^2)}dx_1 \ldots dx_n = A_{n-1}\int_0^{\infty} r^{n-1}e^{-r^2}dr.$$

(b) En effectuant un changement de variable, montrer que $\Gamma(\frac{n}{2}) = 2\int_0^{\infty} r^{n-1}e^{-r^2}dr$.

(c) Conclure que $A_{n-1} = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

(d) Vérifier que le résultat concorde avec celui obtenu en classe via la relation $V_n = \frac{A_{n-1}}{n}$ et la formule qu'on a obtenue pour V_n.

3. On considère le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que le produit vectoriel définit une application multi-linéaire alternée

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\vec{a}, \vec{b}) & \mapsto & \vec{a} \times \vec{b}. \end{array}$$

(b) Montrer que l'application linéaire $\phi : \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ induite par g est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Indice : Quelle est la dimension de $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$?

(c) Donner une interprétation du produit vectoriel en termes du produit extérieur de deux vecteurs.

4. Montrer que la base canonique $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R} & \to & \wedge^3(\mathbb{R}^3) \\ & a & \mapsto & a(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}). \end{array}$$

5. En termes des isomorphismes ϕ et ψ, montrer que le produit scalaire de deux vecteurs est donné par

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \psi^{-1}(\vec{v} \wedge \phi^{-1}(w)) = \psi^{-1}(\vec{w} \wedge \phi^{-1}(v)).$$

6. Soit $\mathbf{A} : V \to V$ une application linéaire et considérons son déterminant tel que défini dans le cours.
   (a) Montrer que si $\mathbf{A}$ est inversible, alors sont déterminant n'est pas nul.
   (b) Inversement, si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, montrer que le noyau de $\mathbf{A}$ est trivial et en déduire que $\mathbf{A}$ est inversible.
7. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w} = \det(A)\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$$

où A est la matrice ayant pour colonnes $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.