Séance de travaux pratiques IX

Le jeudi 9 avril 2020

1. On considère les coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$ données par la paramétrisation

$$\begin{array}{rlcl} \psi: & (0,\infty)\times[0,2\pi) & \to & \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$

   (a) Calculer ψ^*dx et ψ^*dy.

   (b) Montrer que $\psi^*(dx\wedge dy) = r dr\wedge d\theta$.

2. Soit la 2-forme $\omega = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}dx^i\wedge dx^j$ sur $\mathbb{R}^n$ avec $a_{ij}+a_{ji}=0$ pour tout $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. Montrer que

$$d\omega = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}\right)dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k.$$

3. (Théorème de Green) Soit $\lambda = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une 1-forme sur $\mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer que $d\lambda = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$.

   (b) Soit $D\subset\mathbb{R}^2$ un domaine dont la frontière est une courbe $\mathcal{C}$ orientée positivement. En posant $\int_D d\lambda := \int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$, montrer que le théorème de Green admet la formulation suivante en termes de la 1-forme λ,

$$\int_{\mathcal{C}}\lambda = \int_D d\lambda.$$

4. (Théorème de la divergence) Soit $\mathcal{S}\subset\mathbb{R}^3$ une surface orientée par un champ normal unitaire $\hat{n}$. Pour $D\subset\mathbb{R}^2$, soit

$$\begin{array}{rlcl} \psi: & D & \to & \mathcal{S}\subset\mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & \psi(u,v) = (\psi_1(u,v),\psi_2(u,v),\psi_2(u,v)). \end{array}$$

   une paramétrisation de $\mathcal{S}$ qu'on suppose compatible avec l'orientation au sens où $(\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\psi}{\partial v},\hat{n})$ donne en chaque point de $\mathcal{S}$ une base induisant l'orientation canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit d'autre part un champ vectoriel $\vec{F} = F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$.

(a) En termes de cette paramétrisation, montrer, à partir de ce qu'on a vu il y a quelques semaines, que

$$(\vec{F} \cdot \hat{n})dS = \vec{F} \cdot \vec{N} du dv, \quad \text{où} \quad \vec{N} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

(b) Soit

$$\omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy \tag{1}$$

la 2-forme associée à $\vec{F}$. Montrer que

$$\psi^* \omega = \vec{F} \cdot \vec{N} du \wedge dv.$$

(c) Ces calculs suggèrent de définir l'intégrale de la 2-forme ω sur $\mathcal{S}$ par

$$\int_S \omega = \int_D \psi^* \omega := \int_D (\vec{F} \cdot \vec{N}) du dv = \int_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) dS. \tag{2}$$

Si $\mathcal{S}$ est une surface fermée bordant une région $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$, montrer, en utilisant le numéro 5(a) du devoir II, que le théorème de la divergence appliqué à $\vec{F}$ prend la forme

$$\int_{\mathcal{R}} d\omega = \int_{\mathcal{S}} \omega$$

en termes de ω.

5. (Théorème de Stokes) On suppose maintenant que la surface orientée $\mathcal{S}$ du numéro précédent est bordée par une courbe $\mathcal{C}$ orientée positivement par rapport à $\mathcal{S}$ (comme dans le théorème de Stokes) et que $\vec{F} = \nabla \times \vec{E}$ est le rotationnel d'un autre champ vectoriel $\vec{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}$.

(a) Si $\lambda = \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$ est la 1-forme associée à $\vec{E}$ et ω est la 2-forme associée à $\vec{F}$ comme en (1), vérifier que l'énoncé du numéro 5(b) du devoir II stipule que

$$d\lambda = \omega.$$

(b) En utilisant (2) comme définition de l'intégrale de ω sur $\mathcal{S}$, montrer qu'en termes de la 1-forme λ, le théorème de Stokes appliqué au champ vectoriel $\vec{E}$ admet la formulation suivante,

$$\int_{\mathcal{S}} d\lambda = \int_{\mathcal{C}} \lambda.$$