Devoir I

Dû le 31 janvier 2012 en classe

Instructions: Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$ est holomorphe sur son domaine de définition.
2. Parmi les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, lesquelles sont holomorphes?
   (a) $\sin^2(x+y) + i\cos^2(x-y)$,
   (b) $x^3y^5 + ixy^3$,
   (c) $\cos x + i \sin y$.
3. (Exercice II.7 dans [Aud11]) Quelles sont toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est la fonction $z = x + iy \mapsto 2xy$?
4. Montrer que les polynômes à coefficients complexes dans les variables x, y donnent le même ensemble de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ que les polynômes à coefficients complexes dans les variables $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$.
5. (Exercice II.8 dans [Aud11]) Construire une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, polynomiale en x et y, telle que l'ensemble des z en lesquels f est dérivable au sens complexe soit la réunion $\{0\} \cup \{z\ ;\ |z| = 1\}$.
6. (Exercice II.17 dans [Aud11]) Quelle est l'image de $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.
7. (voir Exercice II.26 dans [Aud11]) Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Si $D = D(z_0, r)$ est un disque ouvert contenu dans $\mathcal{U}$, alors on a une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{O}(\mathcal{U}) & \to & \mathcal{O}(D) \\ & f & \mapsto & f|_D\,, \end{array}$$

   obtenue par restriction, où pour $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\mathcal{O}(V)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur V. Trouver une condition suffisante et nécessaire sur $\mathcal{U}$ pour que l'application φ soit surjective.

8. (Exercice II.22 [Aud11]) Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z-z^2}$ admet un développement en série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ en 0. Montrer de plus que les coefficients a_n vérifient $a_0 = a_1 = 1$ et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$. En d'autres termes, a_n est la suite de Fibonacci.
   Indice: Une des approches possibles consiste à utiliser la série géométrique avec la variable $w := z + z^2$.

9. (voir Exercice I.40 dans [Aud11]) Montrer que la suite de Fibonacci a_n du problème précédent est telle que $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ pour A et B des nombres à déterminer, où α et β sont les racines de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$. Utiliser cette formule pour déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

10. (Exercice I.7 dans [Aud11]) Montrer que l'on a

    (a) $\dfrac{1}{z} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (z-1)^n$ pour $|z-1| < 1$,

    (b) $\dfrac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n\geq 1} (n+1)(z+1)^n$ pour $|z+1| < 1$.

Références

[Aud11] Michèle Audin. Analyse complexe. disponible en ligne: http://www-irma.u-strasbg.fr/ maudin/analysecomp.pdf, 2011.