Devoir II

Dû le mardi 18 septembre 2012 en classe

Instructions : Il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution. Seulement les devoirs écrits à la main seront acceptés.

1. On considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z(z-4)}$. Développer la fonction $f(z)$ suivant les puissances entières de $(z-2)$ et déterminer le rayon de convergence de la série entière correspondante.
2. Existe-t-il une fonction continue $f : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ qui soit holomorphe sur $D(0,1)$ et dont la restriction sur le bord soit donnée par la fonction $\dfrac{1}{z}$?
   Indice : Quel serait le résidu d'une telle fonction ?
3. Soit u une fonction harmonique sur un domaine simplement connexe D. Si u atteint un minimum local en $z_0 \in D$, montrer alors que u est une fonction constante.
4. Utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale
   $$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)},$$
   où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2 parcouru dans le sens anti-horaire.
5. Évaluer par la méthode des résidus l'intégrale réelle
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2+x^2}.$$
6. Utiliser un contour consistant en un long rectangle de hauteur π avec un côté sur l'axe réel pour calculer l'intégrale suivante,
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sinh x},$$
   où $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est le sinus hyperbolique.
7. Montrer que la fonction $u(x,y) = e^{-y}\cos x$ est harmonique. Trouver une conjuguée harmonique et une fonction holomorphe $f(z)$ dont u est la partie réelle.

8. (Exercice II.29 [Aud11]) Soit une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0, R)$. Pour $r \in [0, R)$, on pose
$$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$
Montrer que M est une fonction croissante sur $[0, R)$ et qu'elle est strictement croissante si f n'est pas une constante.
9. Déterminer le type de la singularité (artificielle, pôle, essentielle) dans chacun des cas suivants :
   (a) $\dfrac{\sin z}{z^2 - \pi^2}$ en $z = \pi$;
   (b) $\dfrac{\sin z}{(\pi - z)^2}$ en $z = \pi$;
   (c) $\dfrac{6 - z - z^2}{2 - z}$ en $z = 2$;
   (d) $\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ en $z = 0$.
10. Ce dernier problème permettra de généraliser au cas complexe une formule bien connue pour l'exponentielle dans le cas réel.
   (a) À l'aide du théorème du binôme, montrer que
   $$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}.$$
   (b) Par récurrence sur k, démontrer que
   $$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1 + 2 + \cdots + (k-1)}{n}.$$
   (c) En déduire que
   $$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{2n}.$$
   (d) En conclure que
   $$e^z = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
   pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Références

[Aud11] Michèle Audin. Analyse complexe. disponible en ligne : http ://www-irma.u-strasbg.fr/ maudin/analysecomp.pdf, 2011.