Examen final

Le vendredi 28 septembre 2012 - 15h30-18h

Instructions : Il y a 5 problèmes. Chaque problème vaut 20 points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Aucune documentation n'est permise, sauf un aide-mémoire écrit à la main sur une feuille $8\frac{1}{2} \times 11$ recto-verso. Aucune calculatrice et aucun téléphone cellulaire ne sont autorisés.

1. Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité centré en $z = 0$ parcouru dans le sens anti-horaire et soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer l'intégrale
   $$\int_{\mathcal{C}} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}.$$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale suivante :
   $$\int_0^{2\pi} \sin^{2n}\theta \, d\theta.$$
2. Considérer la fonction $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
   (a) Déterminer le développement en série de Laurent de f dans le disque épointé $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
   (b) Déterminer le type de la singularité de f en $z = 0$.
   (c) Calculer le résidu de f en $z = 0$.
   (d) Existe-t-il une fonction holomorphe F dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dont la dérivée complexe serait égale à f partout sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?
3. Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $A = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad 1 \leq |z| \leq 2\}$ telle que :
   (i) $|f(z)| \leq 3$ pour $|z| = 1$,
   (ii) $|f(z)| \leq 12$ pour $|z| = 2$.
   Montrer alors que $|f(z)| \leq 3|z|^2$ pour tout $z \in A$.
4. Calculer l'intégrale réelle $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ en appliquant le théorème des résidus sur le domaine
   $$D_R = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} \quad | \quad 0 < r < R,\ 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$$
   et en prenant la limite $R \to +\infty$.
5. Si f est une fonction méromorphe sur $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, montrer que f a au plus un nombre fini de pôles.