Examen Intra

Le mardi 21 février 2012 - 9h-12h

Instructions : Il y a 5 problèmes. Chaque problème vaut 20 points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Aucune documentation n'est permise, sauf un aide-mémoire écrit à la main sur une feuille $8\frac{1}{2} \times 11$ recto-verso. Aucune calculatrice et aucun téléphone cellulaire ne sont autorisés.

1. Trouver les nombres réels a et b tels que $(\sqrt{3}+i)^{29} = a + ib$.
2. Soit f la fonction définie par $f(z) = \dfrac{z+1}{z-i}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Trouver les parties réelle et imaginaire de la fonction f et montrer qu'elles satisfont aux équations de Cauchy-Riemann.
3. Évaluer les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (z^2+1)dz$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon 1 et de centre $z = 0$ parcouru dans le sens anti-horaire ;
   (b) $\displaystyle\int_{\Gamma} (z^3+2z^2)dz$, où Γ est le segment allant de $z_0 = 1$ à $z_1 = i$ dans le plan complexe ;
   (c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos z}{z}dz$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon 1 et de centre $z = 0$ parcouru dans le sens anti-horaire ;
   (d) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(z-3)^3}dz$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon 2 et de centre $z = 4$ parcouru dans le sens anti-horaire.
4. On considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z(z-4)}$. Développer la fonction $f(z)$ suivant les puissances entières de $(z-1)$ et déterminer le rayon de convergence de la série entière correspondante.
5. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continûment différentiable. On suppose que $|f(z)| \geq 10$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et que $f(z) = 100 + z$ pour $|z| < 1$. La fonction f peut-elle être holomorphe partout sur $\mathbb{C}$?