Utiliser cette page pour les solutions, les développements et les réponses.

Colonne réservée à la correction

#1 a) Par le théorème des binômes:

$$f(z) = \frac{\left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n}}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!\,(2n-k)!} z^k \left(\frac{-1}{z}\right)^{2n-k}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!\,(2n-k)!} (-1)^k z^{2k-2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!\,(2n-k)!} (-1)^k z^{2k-2n-1} \qquad (*)$$

Cela donne la série de Laurent de f dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. On a en particulier:

$$\int_C \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \text{ rés}(f, 0)$$

$$= 2\pi i \,(\text{coefficient de } \tfrac{1}{z} \text{ dans la série de Laurent de } f)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{(2n)!}{n!\,n!} (-1)^n\right), \text{ par } (*)$$

b) Comme $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, on a:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n}\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^{2n} d\theta = \frac{1}{2^{2n}(-1)^n} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\, i e^{i\theta}\, d\theta}{i e^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(-1)^n i} \int_C \left(z - \frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(-1)^n i} (2\pi i) \left(\frac{(2n)!}{n!\,n!} (-1)^n\right) \quad \text{par } \#1\,a)$$

$$= \frac{2\pi\,(2n)!}{2^{2n}\, n!\, n!} = \frac{\pi\,(2n)!}{2^{2n-1} (n!)^2}$$

#2 a) Comme $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, on a que :

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}$$, ce qui donne la série de Laurent de f dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

b) Comme la série de Laurent de f possède une infinité de puissances negatives la singularité de f en 0 est essentielle par un résultat vu en classe.

c) Si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, on a vu que $\text{rés}(f, 0) = c_{-1}$

Par #2 a), on a $c_{-1} = 1 \implies \text{rés}(f, 0) = 1$.

d) Une telle fonction n'existe pas. Autrement, le résidu de f en $z=0$ serait nul par la version complexe du théorème du calcul :

$$\text{rés}(f,0) \int_{\partial D(0,1)} f(z)\,dz = \int_{\partial D(0,1)} F'(z)\,dz = F(z)\Big|_{z=1}^{z=1} = F(1) - F(1) = 0,$$

ce qui n'est pas le cas par #2c).

Colonne réservée à la correction

#3 Posons $h(z) := \dfrac{f(z)}{3z^2}$. Alors h est holomorphe dans $\bar{A}$.

De plus, (i) $|h(z)| = \dfrac{|f(z)|}{3|z|^2} \leq \dfrac{3}{3} = 1$ pour $z \in \partial D(0,1)$, par (i)

et $|h(z)| = \dfrac{|f(z)|}{3|z|^2} \leq \dfrac{12}{3(2)^2} = 1$, pour $z \in \partial D(0,2)$, par (ii).

Donc $|h(z)| \leq 1$ sur ∂A. Par le principe du maximum, on a donc que :

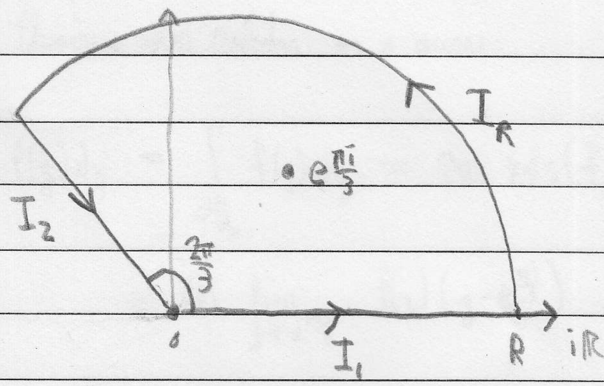
$$|h(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \bar{A} \implies |f(z)| \leq 3|z|^2 \quad \forall z \in A.$$

$\square$

Utiliser cette page pour les solutions, les développements et les réponses.

Colonne réservée à la correction

#4



$\partial D_R = I_1 \cup I_R \cup I_2$.

Considérons la fonction méromorphe $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$. Alors f a des pôles simples en $z = e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{-\pi i}{3}}, -1$. Le seul pôle à l'intérieur de la région D_R est $e^{\pi i/3}$.

On a évidemment : $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{R\to\infty} \int_{I_1} \frac{dz}{1+z^3}$

De plus, on a :

$$\left|\int_{I_R} f(z)dz\right| \leq \frac{2\pi R}{3}\left(\sup_{|z|=R} \frac{1}{|f(z)|}\right) = \frac{2\pi R}{3}\left(\sup_{|z|=R} \frac{1}{|1+z^3|}\right)$$

$$\leq \frac{2\pi R}{3} \sup_{|z|=R} \frac{1}{|z|^3-1} \quad (\text{pour } R>1)$$

$$= \frac{2\pi R}{3} \frac{1}{R^3-1} = \frac{2\pi R}{3(R^3-1)}$$

Comme $\lim_{R\to\infty} \frac{2\pi R}{3(R^3-1)} = 0$, on voit par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{I_R} f(z)dz = 0.$$

Pour l'intégral sur I_2, on pose $z = e^{\frac{2\pi i}{3}} r$ avec $r \in [0,R]$, d'où

$$\int_{I_2} f(z)dz = \int_R^0 \frac{d(e^{\frac{2\pi i}{3}} r)}{1+(e^{\frac{2\pi i}{3}} r)^3} = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^R \frac{dr}{1+e^{2\pi i} r^3} = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^R \frac{dr}{1+r^3}$$

$$= -e^{\frac{2\pi i}{3}} I_R$$

#4 (suite) Par le théorème des résidus, on a aussi :

$$\int_{I_1} + \int_{I_2} + \int_{I_R} f(z)\,dz = \int_{\partial D_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{rés}(f, e^{\frac{\pi i}{3}})$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to e^{\pi i/3}} f(z)(z - e^{\frac{\pi i}{3}}) = 2\pi i \lim_{z\to e^{\pi i/3}} \frac{f(z)(z-e^{\pi i/3})}{(z+1)(z-e^{\pi i/3})(z-e^{-\pi i/3})}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to e^{\pi i/3}} \frac{f(z)}{(z+1)(z-e^{-\pi i/3})} = \frac{2\pi i}{(e^{\pi i/3}+1)(e^{\pi i/3}-e^{-\pi i/3})}$$

En prenant la limite $R\to\infty$, on a donc

$$I - e^{\frac{2\pi i}{3}} I = \frac{2\pi i}{(e^{\frac{\pi i}{3}}+1)(e^{\pi i/3}-e^{-\pi i/3})} = \frac{\pi}{(e^{\pi i/3}+1)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

D'où : $$I = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left(\frac{1}{(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})(1+e^{\pi i/3})}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi/3)}\frac{1}{(1+e^{\frac{5\pi i}{3}})(1+e^{\pi i/3})}, \text{ car } -1 = e^{\pi i}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi/3)}\frac{1}{(1+e^{-\pi i/3})(1+e^{\pi i/3})}, \text{ car } e^{5\pi i/3} = e^{\frac{5\pi i}{3}}e^{-2\pi i} = e^{-\pi i/3}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi/3)}\frac{1}{1+1+e^{-\pi i/3}+e^{\pi i/3}} = \frac{\pi}{\sin(\pi/3)}\frac{1}{2+2\cos(\pi/3)}$$

Réponse : $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{\pi}{2\sin(\pi/3)(1+\cos(\pi/3))}$$

$$= \frac{\pi}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}\,(3/2)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

#5 On a vu en classe que f est nécessairement une fonction rationnelle :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{pour } P \text{ et } Q \text{ des polynômes.}$$

Les seuls endroits où f a possiblement des pôles sont donc en $z = \infty$ et aux endroits où Q s'annule, qui sont en nombre fini, puisque Q a k zéros (comptés avec multiplicité), où $k = \deg Q < \infty$ est le degré de Q.

On voit donc que f a au plus $k+1$ pôles, c'est-à-dire un nombre fini.

Remarque : Dans le cours, on a utilisé implicitement le fait que f possède un nombre fini de pôles pour prouver que f est rationnelle.

Une manière plus légitime de montrer que f possède un nombre fini de pôles est de procéder par contradiction. On suppose que f possède une infinité de pôles. Puisque $\overline{\mathbb{C}}$ est compact, il existe donc une suite z_n de pôles de f telle que $z_n \to z_\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ lorsque $n \to \infty$. Clairement, f ne sera pas bornée près de z_∞, ce qui force z_∞ à être une singularité de f. Puisque $z_n \to z_\infty$, cette singularité ne sera pas isolée, ce qui contredit le fait que f est méromorphe (les pôles sont par définition des singularités isolées). Pour éviter une contradiction, il faut donc admettre que f possède un nombre fini de pôles.