# Séance de travaux pratiques I

Le mardi 17 janvier 2012

1. Trouver les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{i-z}{i+1}$.
2. Donner une description géométrique de l'ensemble des solutions de l'équation $2\operatorname{Re} z < |z|^2$.
3. Trouver le module et l'argument principal du nombre complexe $3\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.
4. Si $z \in \mathbb{C}$ a une partie imaginaire positive, quel est l'argument principal de $\overline{z-\overline{z}}$?
5. Trouver deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $(1-i\sqrt{3})^{85} = a + ib$.
6. Trouver les racines 8ièmes de $256\left(\cos\dfrac{4\pi}{9} + i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)$.
7. Calculer la somme des carrés des racines 4ièmes de $625\left(\cos\dfrac{4\pi}{100} + i\sin\dfrac{4\pi}{100}\right)$.
   Indice: Le calcul est plus simple que ce qu'on pourrait penser à première vue.
8. Trouver les nombres réels $x$ et $y$ satisfaisant à l'équation $|x+iy-2i| = i(x-iy-4)$.
9. Si $z_n = x_n + iy_n$ est une suite de nombres complexes, où $x_n$ et $y_n$ sont des suites de nombres réels, montrer que
   $$\lim_{n\to\infty} z_n = A \iff \lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re} A \text{ et } \lim_{n\to\infty} y_n = \operatorname{Im} A,$$
   où $A$ est un nombre complexe.
10. Soit $P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ un polynôme de degré $n$. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que
    $$|z| \geq R \implies |P_n(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}|z|^n.$$
11. Soit $f$ une fonction holomorphe telle que sa dérivée soit continue dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Si $f$ prend seulement des valeurs réelles, montrer que $f$ est constante.
    Indice: Utiliser les équations de Cauchy-Riemann présentées en classe ce matin juste avant la séance de travaux pratiques.