Séance de travaux pratiques II

Le mardi 24 janvier 2012

1. Montrer qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ qui est absolument convergente est aussi convergente. Autrement dit, montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

2. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où $a_n = 2^{\frac{n}{2}}$ pour n pair et $a_n = 3^{\frac{n+1}{2}}$ pour n impair.

3. Trouver le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}(z-3)^n}{n!}$.

4. Trouver la dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

5. En combinant les séries entières correspondantes, montrer que $e^z e^w = e^{z+w}$ et que $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$.

6. Montrer que e^z ne s'annule jamais.

7. Montrer que $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

8. Montrer que l'algèbre $\mathbb{C}[x,y]$ des polynômes à coefficients complexes dans les variables réelles x, y donne le même espace de fonctions que l'algèbre $\mathbb{C}[z,\overline{z}]$ des polynômes à coefficients complexes dans les variables $z = x+iy$ et $\overline{z} = x-iy$. Décrire l'action des opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sur l'algèbre $\mathbb{C}[z,\overline{z}]$.