Séance de travaux pratiques III

Le mardi 31 janvier 2012

1. Si $a > 0$, trouver une manière de définir a^z de façon unique.

2. Étant donné un nombre fini de points du plan complexe, trouver un polynôme qui s'annule en ces points.

3. Donner un exemple d'une série entière de rayon de convergence 1 qui:

   (a) converge en $z = 1$;

   (b) diverge en $z = 1$.

4. (Principe des zéros isolés) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $f(z) \neq 0$ pour $0 < |z| < r$.

5. Soit $u : D \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Montrer que la différentielle de u peut être exprimée en termes des variables complexes z et $\overline{z}$:

$$du := \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}d\overline{z},$$

   où $d\overline{z} = dx - idy$.

6. Évaluer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} z dz$ pour la courbe $\mathcal{C}_1$ illustrée ci-dessous.

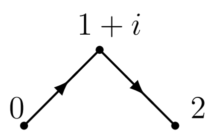

Figure 1: $\mathcal{C}_1$

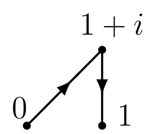

Figure 2: $\mathcal{C}_2$

7. Évaluer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_2} \overline{z} dz$ pour la courbe $\mathcal{C}_2$ illustrée ci-dessus.

8. Évaluer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{2z+3}{z-4i}dz$, où $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon 4 centré en $z = 4i$ parcouru dans le sens anti-horaire.