# Séance de travaux pratiques IV

## Le mardi 7 février 2012

1. Le théorème fondamental de l'algèbre stipule que tout polynôme à coefficients complexes de degré supérieur à zéro possède une racine complexe. Démontrer le théorème fondamental de l'algèbre en utilisant le théorème de Liouville.
2. Montrer qu'un polynôme à coefficients complexes de degré $n$ possède précisément $n$ racines (comptées avec multiplicité).
3. Montrer que le domaine $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe. Indice : Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z}$, où $\mathcal{C}$ est un cercle centré en 0, et appliquer le théorème de Cauchy (la version pour les domaines simplement connexes) pour établir par contradiction que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne peut pas être simplement connexe.
4. On a vu en classe que si $p$ et $q$ sont des fonctions continûment différentiables sur un domaine D telles que $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} pdx + qdy = 0$ pour toute courbe fermée $\mathcal{C}$, alors $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$. Montrer que la réciproque n'est pas valide en général en donnant un exemple. Indice : Utiliser le problème précédent.
5. Calculer $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$, où $\mathcal{C}$ est le cercle unité parcouru dans le sens anti-horaire et $f$ est la fonction donnée par :
   (a) $f(z) = \dfrac{1}{z - \frac{1}{2}}$ ;
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ ;
   (c) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 4}$.
6. Soit $u$ une fonction continue sur $D$ telle que
$$\int_K u \; dxdy = 0$$
pour tout disque fermé $K$ contenu dans $D$. Montrer que $u$ s'annule partout sur $D$.
7. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continûment différentiable telle que $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$ pour toute courbe fermée $\mathcal{C}$ contenue dans $D$. Montrer alors en utilisant le théorème de Green complexe que $f$ est holomorphe.