Séance de travaux pratiques V

Le mardi 14 février 2012

1. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Si $D = D(z_0, r)$ est un disque ouvert contenu dans $\mathcal{U}$, alors on a une application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{O}(\mathcal{U}) & \to & \mathcal{O}(D) \\ & f & \mapsto & f|_D\,, \end{array}$$
obtenue par restriction, où pour $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\mathcal{O}(V)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur V.
   (a) Trouver une condition suffisante et nécessaire sur $\mathcal{U}$ pour que l'application φ soit surjective.
   (b) Trouver une condition suffisante et nécessaire sur $\mathcal{U}$ pour que l'application φ soit injective.
2. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq |e^z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer alors qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \lambda e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Indice : Utiliser le théorème de Liouville.
3. Montrer que la série entière
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n$$
est un prolongement analytique de la série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Déterminer les disques de convergence des deux séries et les tracer dans le plan complexe.
4. Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $r \in (0, R)$, montrer que la suite des sommes partielles de la série converge uniformément sur le disque $D(0, r)$ vers la somme de la série.
5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{4}} dz$, où $\mathcal{C}$ est le cercle unité de centre $z = \frac{\pi}{4}$ parcouru dans le sens anti-horaire. Indice : Penser à la formule de Cauchy.
6. Montrer que la suite de fonctions $f_n(z) = z^n$ converge ponctuellement vers zéro sur le disque $D(0, 1)$. Est-ce que la suite converge uniformément sur ce disque ?
7. Soit $D \subset \mathbb{C}$ le disque (ouvert) de rayon 1 et de centre 1.
   (a) Montrer que la fonction $f(z) := \displaystyle\int_1^z \frac{dz}{z}$ est bien définie sur D et holomorphe.
   (b) Montrer de plus que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in D$. Indice : Calculer la série de Taylor de la fonction $e^{f(z)}$ en $z = 1$.
   (c) Est-ce $f(z)$ possède un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

8. Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, montrer que son image inverse $f^{-1}(U)$ est un ouvert de D. En déduire que $f^{-1}(E)$ est un fermé de D si $E \subset \mathbb{C}$ est un fermé de $\mathbb{C}$.