

## Séance de travaux pratiques VII

Le lundi 10 septembre 2012

1. Calculer l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$ .
2. Une fonction **méromorphe** sur un domaine  $D$  est une fonction dont les seules singularités sont des pôles. Soit  $f$  une fonction méromorphe sur  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Montrer alors que  $f$  (restreinte à  $\mathbb{C}$ ) est une fonction rationnelle.
3. Calculer l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1 - e^x} dx$  en utilisant un long rectangle avec un côté sur l'axe réel et un côté de hauteur  $2\pi$ .
4. Calculer l'intégrale  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 - 5 \sin \theta}$ .
5. Calculer l'intégrale  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5 + 3 \sin \theta} d\theta$ .
6. Trouver l'ordre des pôles des fonctions suivantes aux points indiqués :
  - (a)  $\frac{e^{z^2} - 1}{z^3}$  en  $z = 0$ ,
  - (b)  $\tan^2 z$  en  $z = \frac{\pi}{2}$ ,
  - (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^n$  en  $z = -1$ .
7. Si  $f$  a un pôle d'ordre  $k$  en  $z_0$ , montrer que le résidu de  $f$  en  $z_0$  est donné par

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} (f(z)(z - z_0)^k).$$

8. Trouver le résidu des fonctions suivantes aux points indiqués :
  - (a)  $\frac{2z^2 + 1}{z^2 + 25}$  en  $z = 5i$ ,
  - (b)  $\frac{e^{z-1}}{e^z - 1}$  en  $z = 0$ ,
  - (c)  $z \tan z$  en  $z = \frac{\pi}{2}$ .
9. Montrer que le résidu à l'infini d'une fonction rationnelle  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  est nul lorsque  $\deg Q \geq \deg P + 2$ .