Séance de travaux pratiques VIII

Le lundi 17 septembre 2012

1. Soit f une fonction holomorphe ayant un zéro d'ordre k en z_0. Montrer alors que le résidu en z_0 de la fonction $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ est donné par
$$\operatorname{res}(\frac{f'}{f}, z_0) = k.$$
2. Trouver la série de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$.
3. Trouver la série de Laurent de $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(3-z)}$ dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$.
4. Soient f et g deux fonctions continues sur la fermeture $\overline{D}$ d'un domaine connexe D. Si $f = g$ sur ∂D et si f et g sont holomorphes sur D, montrer alors que $f = g$ partout sur D.
5. Montrer que si u est harmonique sur le disque $D(z_0, R)$, alors la valeur de u au centre du disque est égale à la moyenne de u sur le bord du disque $D(z_0, r)$ pour tout $r \in (0, R)$ (propriété de la moyenne).
Indice : Prener une conjuguée harmonique et appliquer la formule de Cauchy.
6. Soit f une fonction continue sur un domaine connexe D satisfaisant à la propriété de la valeur moyenne en tout point z_0 de D. Montrer que si f atteint son maximum en $z_0 \in D$, alors f est une fonction constante.
7. Montrer que la limite uniforme de fonctions harmoniques est harmonique.
Indice : Montrer d'abord que la limite u satisfait à la propriété de la moyenne puis utiliser le principe du maximum du problème 6 pour montrer que u est localement la solution d'un problème de Dirichlet sur un petit disque, donc est harmonique.
8. Une fonction méromorphe f sur le plan complexe telle que $f(z+1) = f(z)$ et $f(z+i) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ est dite doublement périodique (elliptique). Montrer qu'une fonction entière doublement périodique est constante.
9. Prouver le lemme suivant.

Lemme 1 (Schwarz)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur le disque fermé de rayon 1 et de centre z_0. Si $f(z_0) = 0$ et s'il existe une constante M telle que $|f(z)| \leq M$ sur le bord du disque, alors $|f(z)| \leq M|z - z_0|$ pour tout z dans le disque.*

Indice : Considérer $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ et utiliser le principe du maximum.