Séance de travaux pratiques IX

Le lundi 24 septembre 2012

1. Pour $\lambda \in (0,1)$ évaluer l'intégrale réelle suivante :

$$I = \int_0^\infty \frac{(\ln x)dx}{x^\lambda(1+x)}.$$

2. Pour $\operatorname{Re} z > 0$, la fonction Gamma est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Cette fonction est holomorphe dans cette région.

(a) En intégrant par parties, montrer que la fonction Gamma satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

(b) Montrer que $\Gamma(1) = 1$ et en déduire que la fonction Gamma admet un prolongement méromorphe dans la région $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$ avec un pôle simple en $z = 0$.

(c) En procédant par récurrence, montrer plus généralement que la fonction Gamma admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en $z = -k$ pour $k \in \mathbb{N}_0$.

3. Combien de zéros la fonction $3e^z - z$ possède-t-elle dans le disque $D(0,1)$?

4. Combien de racines le polynôme $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ a-t-il dans le disque unité $D(0,1)$ (voir exercice V.7, p.92 dans les notes de Michèle Audin).

5. (Exercice V.8 dans les notes de Michèle Audin) Montrer que pour tout réel $\lambda > 1$, la fonction $f(z) = ze^{\lambda - z} - 1$ a exactement un zéro dans le disque unité.