Exemple d'un examen final antérieur

Instructions : Il y a 5 problèmes. Chaque problème vaut 20 points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Aucune documentation n'est permise, sauf un aide-mémoire écrit à la main sur une feuille $8\frac{1}{2} \times 11$ recto-verso. Aucune calculatrice et aucun téléphone cellulaire ne sont autorisés.

1. Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité centré en $z = 0$ parcouru dans le sens anti-horaire.
   (a) Calculer l'intégrale
   $$\int_{\mathcal{C}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}.$$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale suivante,
   $$\int_0^{2\pi} \cos^n \theta \, d\theta.$$
2. On considère la fonction
   $$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)},$$
   où $0 < a < b$. Soit c un nombre complexe tel que $|a-c| < |b-c|$. Développer $f(z)$ suivant les puissances entières de $(z-c)$
   (a) dans le disque $\{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z-c| < |a-c|\}$,
   (b) et dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |a-c| < |z-c| < |b-c|\}$.
3. Évaluer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :
   $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a(1+x^2)},$$
   où $0 < a < 1$.
4. Soit u une fonction harmonique sur $\mathbb{C}$. S'il existe une constante positive M telle que $-M < u(z) < M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer alors que u est une fonction constante.
5. Considérer la fonction
   $$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$
   (a) Montrer que la singularité à l'origine est artificielle.
   (b) Soit
   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}$$
   son développement de Taylor à l'origine. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles ce développement est valable.
   (c) Calculer les trois premiers nombres de Bernouilli B_0, B_1, B_2.
   (d) Montrer que $B_{2k+1} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$.