Examen intra de l'année dernière

Les solutions sont disponibles sur la page web de Franco Saliola: http://thales.math.uqam.ca/ saliola/maths/teaching/MAT3010-2011H/examens/examen2-solutions.pdf

1. Évaluer les intégrales suivantes:
   (a) (4 pts) $\int_\gamma f(z)dz$, où $f(x+iy) = x^2 + iy^2$ et γ est le segment de 1 à i;
   (b) (4 pts) $\int_\mathcal{C} \sin(z)dz$, où $\mathcal{C}$ est le cercle unité centré en $z = 0$ parcouru dans le sens anti-horaire;
   (c) (4 pts) $\int_\mathcal{C} \frac{z^3}{z^2 - 2z + 1}dz$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon 2 et de centre $z = 1$ parcouru dans le sens anti-horaire.
2. (8 pts) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\int_\mathcal{C} \frac{e^{\alpha z}}{z^2+1}dz = 2\pi i \sin(\alpha),$$
   où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $z = 0$ et de rayon 2 parcouru dans le sens anti-horaire.
3. (10 pts) Soit f une fonction entière satisfaisant $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
4. (10 pts) Soit U un ouvert connexe tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon $r > 0$ soit contenu dans U. Soit f une fonction holomorphe non-constante sur U. Montrer que si $|f|$ est constante sur le cercle de rayon r et de centre z_0, alors f admet un zéro dans le disque $D(z_0, r)$.
5. Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction holomorphe sur U qui ne s'annule pas sur U, c'est-à-dire que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.
   (a) (5 pts) Montrer que la fonction $\frac{f'}{f}$ possède une primitive holomorphe sur U.
   (b) (5pts) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe F sur U telle que $e^{F(z)} = f(z)$ pour tout $z \in U$.