Devoir I

Dû le mardi 14 février 2023 (en classe ou dans la chute à travaux)

Instructions : En tenant compte des sous-questions, il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. On considère le système linéaire $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$ avec $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver une matrice fondamentale pour ce système.
   (b) Tracer quelques trajectoires de solutions dans l'espace des phases.
   (c) Ce système provient-il de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti.

2. On considère le système $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \vec{x}$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $bc < 0$.
   (a) Trouver la solution générale de ce système.
   (b) Tracer quelques trajectoires de solutions dans l'espace des phases en distinguant trois cas : $a > 0$, $a = 0$ et $a < 0$.

3. On considère l'équation $x''(t) + (1 + \cos^2 t)x(t) = 0$.
   (a) Montrer que toute solution non-triviale possède une infinité de zéros dans l'intervalle $[0, \infty)$.
   (b) Montrer que pour toute solution non-triviale, la distance entre deux zéros successifs est toujours d'au moins $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

4. Montrer que l'équation $\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 1, & x(t) < 0, \\ -1, & x(t) \geq 0 \end{cases}$ ne possède pas de solution telle que $x(0) = 0$.

5. Pour des choix judicieux de $\delta > 0$ et $M > 0$, l'application de Picard $Ax(t) := \int_0^t 3x^{\frac{2}{3}}(\tau)d\tau$ peut-elle être une application contractante sur l'espace métrique
$$E := \{x : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \mid x \text{ est continue et } \sup_{t\in(-\delta,\delta)} |x(t)| \leq M\}$$
muni de la métrique
$$d(x, y) := \sup_{-\delta<t<\delta} |x(t) - y(t)|?$$

6. Combien de solutions différentes telles que $x(0) = 0$ l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{3}}$ possède-t-elle ?