Devoir II

Dû le mardi 11 avril 2023 (en classe ou dans la chute à travaux)

Instructions : En tenant compte des sous-questions, il y a dix problèmes. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. On considère une particule de masse m contrainte de se déplacer sur la parabole d'équation $y = x^2$ dans le plan et soumise à l'accélération gravitationnelle de g vers le bas. Si on utilise la coordonnée x pour décrire la position de la particule, alors son énergie potentielle est donnée par

$$U = mgx^2.$$

En termes de x et $v := \dfrac{dx}{dt}$, son énergie cinétique est donnée par

$$T = \frac{1}{2}m(1+4x^2)v^2$$

et les équations du mouvement de la particule sont données par

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{2x(g+2v^2)}{1+4x^2}. \end{aligned}$$

   (a) Le long des solutions du système, montrer que l'énergie totale $H = T + U$ de la particule est préservée.

   (b) Montrer que $(x, v) = (0, 0)$ est la seule position d'équilibre et déterminer sa nature et sa stabilité.

   (c) Tracer un portrait des trajectoires du système dans l'espace des phases.

2. On considère le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(2-x-y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(3-2x-y) \end{aligned}$$

modélisant l'évolution des populations de deux espèces en compétition pour les mêmes ressources.

(a) Dans l'espace des phases, tracer les isoclines verticales et horizontales de ce système, la direction du champ de vecteurs du système le long de ces dernières ainsi que dans les zones qu'elles découpent.

(b) Déterminer quelles sont les positions d'équilibre du système, leur stabilité et leur nature.

(c) Tracer un portrait des trajectoires du système dans l'espace des phases.

(d) À terme, s'attend-t-on en général à ce que les deux espèces réussissent à coexister ?

3. On considère le système

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y + a$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

(a) Pour chaque valeur du paramètre a, trouver toutes les positions d'équilibre.

(b) Lorsque possible, utiliser le théorème de linéarisation pour étudier la stabilité de ces positions d'équilibre.

(c) Décrire toutes les bifurcations qui se produisent lorsque le paramètre a varie.