

## Liste d'exercices I

### Semaine du 9 janvier 2023

1. Les exercices 1,2,4 et 5 de [Roc21, § 4.8].
2. Soit  $GL(n, \mathbb{C})$  le groupe des matrices  $n$  par  $n$  inversibles ayant des entrées complexes. Notons que  $GL(n, \mathbb{C})$  est un sous-ensemble ouvert de  $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ , l'ensemble de toutes les matrices  $n$  par  $n$  à entrées complexes. Le déterminant peut être vu comme une fonction  $\det : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ .
  - (a) Si  $t \mapsto \mathbb{A}(t) \in GL(n, \mathbb{C})$  est une application différentiable telle que  $\mathbb{A}(t_0)$  est diagonalisable pour un certain  $t_0 \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$\frac{d}{dt}(\det \mathbb{A})(t_0) = \det(\mathbb{A}(t_0)) \operatorname{Tr} \left( \mathbb{A}(t_0)^{-1} \frac{d\mathbb{A}}{dt}(t_0) \right). \quad (1)$$

- (b) En utilisant le fait que les matrices ayant des valeurs propres distinctes sont denses dans  $GL(n, \mathbb{C})$  (voir par exemple [HSD13, § 5.6]), déduire que la formule (1) reste valide même si  $\mathbb{A}(t_0)$  n'est pas diagonalisable.

## Références

- [HSD13] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third edition, 2013.
- [Roc21] F. Rochon. Mat2190 : Calcul des équations différentielles ordinaires et partielles. disponible en ligne : <http://profmath.uqam.ca/~rochon/enseignement/MAT2190/MAT2190.pdf>, 2021.