

Liste d'exercices XI

Semaine du 3 avril 2023

1. Montrer qu'un système admettant une fonction de Liapounov stricte ne possède pas d'orbites fermées.
2. Soit \vec{y} un point positivement récurrent d'un système plan, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante $\{t_n\}$ telle que $\phi_{t_n}(\vec{x}) \rightarrow \vec{x}$. Montrer que soit \vec{x} est une position d'équilibre, soit \vec{x} est contenu dans une orbite fermée.
3. Montrer qu'une orbite fermée d'un système plan $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$ avec \vec{v} de classe \mathcal{C}^2 coupe toute section locale du flot en au plus un point.
4. Soit $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$ un système plan avec \vec{v} de classe \mathcal{C}^2 ayant un nombre fini de positions d'équilibre. Soient Ω un ensemble limite borné et $\vec{y} \in \Omega$ un point tel que $\vec{v}(\vec{y}) \neq 0$. Si \vec{y} n'est pas contenu dans une orbite fermée, montrer qu'il existe des positions d'équilibre $y_-, y_+ \in \Omega$ telles que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi_t(\vec{y}) = y_{\pm}.$$

Indice : Utiliser la compacité de Ω et le fait que la trajectoire passant par \vec{y} coupe toute section locale du flot en au plus un point.

5. On considère le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) (x^3 - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 - x - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) y. \end{aligned}$$

- (a) Montrer que $(-1, 0)$, $(0, 0)$ et $(1, 0)$ sont des positions d'équilibre.
 - (b) Dans chaque cas, déterminer leur nature et leur stabilité.
6. (**Défi**) Montrer qu'un ensemble limite borné est forcément connexe.