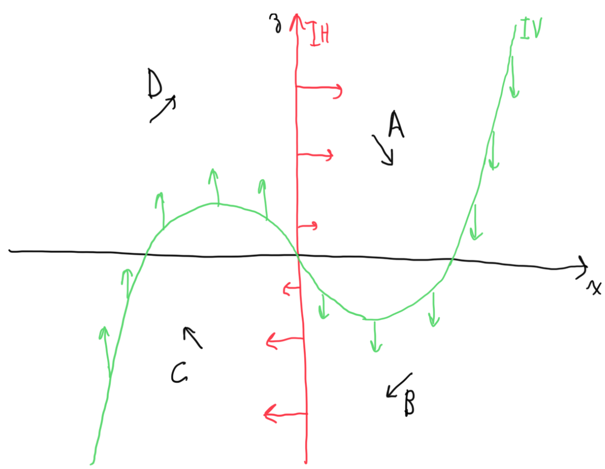
Liste d'exercices XII

Semaine du 11 avril 2023

1. On considère le système des équations de Liénard

$$\frac{dx}{dt} = z - F(x),$$
$$\frac{dz}{dt} = -g(x),$$

avec F et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $g(x)$ est une fonction impaire avec $g(x) > 0$ pour $x > 0$ et $F(x)$ est une fonction impaire ayant un seul zéro strictement positif en $x = a > 0$. On suppose aussi que F est strictement négative pour $x \in (0, a)$, alors que pour $x \in (a, \infty)$, elle est strictement positive et croissante avec $F(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. On suppose enfin que $g'(0) > 0$ et que $F'(0) < 0$. Les isoclines verticales et horizontales décomposent alors l'espace des phases en quatre régions A, B, C et D tel qu'illustré :



(a) Hormis pour la position d'équilibre, montrer de deux manières qu'une trajectoire débutant dans la zone A doit éventuellement couper l'isocline verticale pour se retrouver dans la zone B :

i. En montrant que le long d'une telle trajectoire, il existe $\tau > 0$ et $c > 0$ tels que $\frac{dz}{dt} < c$ dès que $t \geq \tau$;

ii. En utilisant le théorème de Poincaré-Bendixon et le fait qu'une orbite fermée du système doit forcément tourner autour de l'origine (la seule position d'équilibre).

(b) Hormis pour la position d'équilibre, montrer qu'une trajectoire débutant dans la zone B doit éventuellement couper l'isocline horizontale pour se retrouver dans la zone C. *Indice : Montrer qu'il existe $\tau > 0$ et $c > 0$ tels que $\frac{dx}{dt} < -c$ dès que $t \geq \tau$.*

(c) On a vu en classe que le système possède une seule orbite fermée γ. Utiliser le théorème de Poincaré-Bendixon pour montrer que $\gamma = \omega(x, z)$ pour tout $(x, z) \neq (0, 0)$.

2. On considère le système

$$\frac{dx}{dt} = y,$$
$$\frac{dy}{dt} = (1 - x^4)y - x.$$

(a) Montrer que $(0, 0)$ est la seule position d'équilibre. Peut-on utiliser le théorème de linéarisation pour déterminer sa nature et sa stabilité ?

(b) Dans l'espace des phases, tracer les isoclines verticales et horizontales de ce système, la direction du champ de vecteurs du système le long de ces dernières ainsi que dans les zones qu'elles découpent.

(c) Si $(x(t), y(t))$ est une solution, montrer que $(-x(t), -y(t))$ est aussi une solution.

(d) Hormis la position d'équilibre, montrer que toutes les solutions tournent éventuellement autour de l'origine dans le sens horaire.

(e) Montrer que la fonction $H(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ croît le long des solutions suffisamment près de l'origine.

(f) Utiliser le théorème de Poincaré-Bendixon pour montrer que le système possède une orbite fermée tournant autour de l'origine.