Liste d'exercices III

Semaine du 23 janvier 2023

1. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on considère la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}.$$

   (a) Montrer que $\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que $\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}_0$.

   (c) Utiliser a) pour montrer que $J_n'(x) + \frac{n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Utiliser b) pour montrer que $J_n'(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = -J_{n+1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}_0$.

2. En utilisant le théorème de Rolle et le numéro précédent, montrer, pour $n \in \mathbb{N}_0$, que les zéros de J_n et J_{n+1} alternent.

3. En trouvant explicitement les solutions à l'équation d'Euler

$$y'' + \frac{k}{x^2} y = 0, \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{R},$$

   montrer qu'une solution non-triviale possède une infinité de zéros lorsque $k > 1/4$, mais seulement un nombre fini lorsque $k \leq 1/4$.

4. Si $y(x)$ est une solution non-triviale de l'équation

$$y'' + q(x) y = 0, \quad x > 0,$$

   montrer que $y(x)$ possède une infinité de zéros si $q(x) > \frac{k}{x^2}$ pour tout $x > 0$ et pour un certain $k > 1/4$, mais seulement un nombre fini si plutôt $q(x) < \frac{1}{4x^2}$ pour tout $x > 0$. *Indice : Utiliser le théorème de comparaison de Sturm et le numéro précédent.*

5. Faire l'exercice 1 du [Arn88, § 31.9].

Références

[Arn88] V. Arnold. *Équations différentielles ordinaires.* Traduit du Russe : Mathématiques. "Mir", Moscou, 1988. quatrième édition, traduit du russe Djilali Embarek.