Liste d'exercices IV

Semaine du 30 janvier 2023

1. Montrer qu'une application lipshitzienne entre deux espaces métriques est automatiquement continue.
2. Déterminer si les fonctions suivantes sont lipshitziennes sur leur domaine de définition :
   (a) $f(x) = |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ pour $x \in [-1, 1]$;
   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [1, \infty)$;
   (d) $f(x, y) = (x + 2y, -y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
   (e) $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ pour $x^2 + y^2 \leq 4$.
3. Soient K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et

$$E := \{f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}$$

   l'ensemble des fonctions continues sur K. Montrer que l'application

$$d(f_1, f_2) = \max_{x \in K} |f_1(x) - f_2(x)|$$

   induit une structure d'espace métrique sur E.
4. Faire l'exercice 2 du [Arn88, § 31.9].
5. On considère le système $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de l'espace des phases élargi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Montrer que le théorème d'existence, d'unicité et de continuité par rapport aux conditions initiales reste valide si on suppose seulement que $\vec{v}$ est continue sur $\mathcal{U}$ et qu'il existe une contante L telle que

$$|\vec{v}(\vec{x}_1, t) - \vec{v}(\vec{x}_2, t)| \leq L|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \quad \forall (\vec{x}_1, t), (\vec{x}_2, t) \in \mathcal{U}.$$

Références

[Arn88] V. Arnold. *Équations différentielles ordinaires.* Traduit du Russe : Mathématiques. "Mir", Moscou, 1988. quatrième édition, traduit du russe Djilali Embarek.