

Liste d'exercices V

Semaine du 6 février 2023

1. Si, pour $r \geq 1$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ est une application de classe C^r qui est un difféomorphisme, utiliser la relation

$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}$$

pour conclure que f^{-1} est aussi de classe C^r .

2. . Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^3$ est un homéomorphisme, mais pas un difféomorphisme.
3. Montrer que les coordonnées polaires induisent un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \psi : [0, \infty) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\}) \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

4. Exercice 2 de [Arn88, § 5.3].
5. On considère l'équation $\frac{dx}{dt} = x^2$.
 - (a) Sauf pour la solution triviale $x = 0$, montrer que les solutions de l'équation ne peuvent pas être prolongées indéfiniment.
 - (b) Esquisser quelques courbes intégrales de solutions de l'équation dans l'espace des phases élargi.

Références

- [Arn88] V. Arnold. *Équations différentielles ordinaires*. Traduit du Russe : Mathématiques. "Mir", Moscou, 1988. quatrième édition, traduit du russe Djilali Embarek.