Liste d'exercices VI
Semaine du 13 février 2023

Soit $\vec{v} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^r avec $r \geq 1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $H : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^r telle que $dH_{\vec{x}}(\vec{v}(\vec{x})) = 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathcal{U}$.
   (a) Pour toute solution $\vec{x}(t)$ du système $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$, montrer que $t \mapsto H(\vec{x}(t))$ est une fonction constante.
   (b) Si $F_c := H^{-1}((-\infty, c))$ est tel que $\overline{F}_c = H^{-1}((-\infty, c])$ est compact pour un certain $c \in \mathbb{R}$ et que la différentielle dH ne s'annule nulle part sur $\partial F_c = H^{-1}(c)$, montrer que le flot de $\vec{v}$ existe sur $F_c \times \mathbb{R}$:
   $$\phi : F_c \times \mathbb{R} \to F_c.$$
   (c) Avec les mêmes hypothèses, montrer que le flot est bien défini sur ∂F_c pour tout temps :
   $$\phi : \partial F_c \times \mathbb{R} \to F_c.$$
2. Soit F est un ouvert borné tel que sa fermeture $\overline{F}$ est incluse dans $\mathcal{U}$ et sa frontière ∂F est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (a) Si sur ∂F, le champ de vecteurs $\vec{v}$ pointe vers l'intérieur de F, montrer que le flot $\phi_t : F \to F$ existe pour tout $t \geq 0$.
   (b) Si sur ∂F, le champ de vecteurs $\vec{v}$ pointe plutôt vers l'extérieur de F, montrer que le flot $\phi_t : F \to F$ existe pour tout $t \leq 0$.
   (c) Dans les deux cas, est-ce que $\phi_t : F \to F$ est un difféomorphisme pour $t \neq 0$ (lorsque défini) ?
3. Si $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ et $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbb{A}\vec{x}$ pour une certaine matrice $\mathbb{A}$ à coefficients constants, montrer que le flot de $\vec{v}$ est donné par
   $$\phi_t(\vec{x}) = \exp(t\mathbb{A})\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$
4. Si $\vec{x} = |\vec{x}|\vec{x}$ pour $\vec{x} \neq 0$, alors montrer que le flot de $\vec{v}$ est donné par
   $$\phi(\vec{x}, t) = \frac{\vec{x}}{1 - |\vec{x}|t} \quad \text{pour } t < \frac{1}{|\vec{x}|}.$$
   En particulier, le temps d'existence du flot dépend de $\vec{x}$ et ne peut être choisi de façon uniforme sur $\mathbb{R}^n$. Indice : Utiliser les coordonnées sphériques.