

Liste d'exercices VIII

Semaine du 13 mars 2023

1. Dans le système de Volterra, montrer que $\frac{d^2y}{dt^2} > 0$ dès que $\frac{dx}{dt} > 0$. Similairement, montrer que $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$ dès que $\frac{dy}{dt} < 0$. Expliquer concrètement ce que le modèle prédit dans ces deux cas.

2. Pour le système

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\gamma y - \frac{g}{l} \sin \theta \end{pmatrix}$$

du pendule avec friction, montrer que la position d'équilibre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est asymptotiquement stable en invoquant le théorème de linéarisation.

3. Trouver les positions d'équilibre et analyser leur stabilité pour les versions modifiées suivantes des équations de Volterra :

- (a) Le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(1 - \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

pour $x > 0$ et $y \geq 0$.

- (b) Le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{axy}{x+1} \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y) \end{aligned}$$

pour $a > 0$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

- (c) Le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{xy}{x+b} \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y) \end{aligned}$$

pour $b > 0$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$.