

**UQÀM**

**Université du Québec  
à Montréal**

**MAT3190**

**Théorie des équations différentielles  
ordinaires**



*Frédéric Rochon*

*(avec l'aide de Corinne Landry pour la rédaction en LaTeX)*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Entrée en matière</b>	<b>3</b>
1.1	Notions de base . . . . .	4
1.2	Systèmes linéaires . . . . .	6
1.3	Étude des zéros des solutions d'une EDO linéaire d'ordre 2 . . . . .	17
1.4	Exercices . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Les théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires</b>	<b>22</b>
2.1	Existence et unicité des solutions . . . . .	22
2.2	Régularité des solutions . . . . .	27
2.3	Redressement de champs de vecteurs . . . . .	30
2.4	Prolongement des solutions . . . . .	34
2.5	Le flot d'un champ de vecteurs . . . . .	36
2.6	Exercices . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Stabilité d'une solution</b>	<b>42</b>
3.1	Stabilité d'un point singulier . . . . .	42
3.2	Stabilité des systèmes linéaires en dimension 2 . . . . .	45
3.3	Les équations de Volterra (système proie-prédateur) . . . . .	48
3.4	Fonction de Liapounov . . . . .	50
3.5	Classification des systèmes linéaires (homogènes) . . . . .	57
3.6	Exercices . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Étude qualitative de solutions</b>	<b>62</b>
4.1	Équations de Volterra modifiées . . . . .	62
4.2	La méthode des isoclines . . . . .	66
4.3	Bifurcations . . . . .	71
4.4	Exercices . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Orbites fermées</b>	<b>76</b>
5.1	Ensembles limites . . . . .	76
5.2	L'application de Pointcaré . . . . .	78
5.3	Théorème de Poincaré-Bendixon . . . . .	80
5.4	Les équations de Van Der Pol et de Liénard . . . . .	84
5.5	Exercices . . . . .	87
	<b>Références</b>	<b>91</b>

## Préface

Ce recueil est constitué des notes du cours *MAT3190-Théorie des équations différentielles ordinaires* donné à l'hiver 2023 à l'UQÀM. D'abord sous une forme manuscrite, les notes de cours ont été tapées en LaTeX par Corinne Landry à l'été 2024. Une relecture attentive à l'été 2025 a permis d'éliminer plusieurs coquilles et a donné lieu à une réorganisation importante du recueil. Celui-ci se veut succinct. Pour des ouvrages plus étoffés, on réfère le lecteur aux livres d'Arnold [Arn88, Arn80] ainsi qu'aux livres de Hirsch, Smale et Devaney [HSD13] et de George F. Simmons [Sim17].

# 1 Entrée en matière



Le but du cours est de développer une théorie des équations différentielles ordinaires permettant d'obtenir des résultats qualitatifs pour certaines équations sans forcément connaître explicitement les solutions. Dans ce premier chapitre, nous allons introduire les notions de base et rappeler certains résultats du cours *MAT2191-Calcul des équations différentielles ordinaires*. Nous allons aussi illustrer l'intérêt de développer une telle théorie des équations différentielles ordinaires en décrivant quelques résultats qualitatifs concernant les zéros de solutions de certaines équations.

## 1.1 Notions de base

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation impliquant une fonction d'une variable réelle et ses dérivées.

**Exemple 1.1.** *L'équation du mouvement d'un pendule de longueur  $\ell$  est une EDO (avec  $g \approx 9,8m/s^2$  l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre) :*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0.$$

On a un système d'EDO s'il y a plusieurs équations différentielles impliquant plusieurs fonctions dépendant de la même variable.

**Exemple 1.2.** *Si  $x$  et  $y$  dénotent les populations de mouches et d'araignées d'une forêt, alors pour  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  des constantes strictement positives, le système proie-prédateur (Lotka-Volterra)*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

*est un système d'EDO pouvant servir à modéliser l'évolution de ces populations.*

L'ordre d'une EDO ou d'un système d'EDO est l'ordre de la dérivée la plus élevée. Par exemple, l'équation du pendule est une EDO d'ordre 2, alors que le système proie-prédateur est un système d'ordre 1.

En général, si  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  est une fonction de  $t \in \mathbb{R}$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ , alors un système d'EDO d'ordre  $k$  est de la forme

$$F(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \dots, \frac{d^k \vec{x}}{dt^k}) = \vec{G}(t) \quad (1)$$

pour certaines fonctions  $F$  et  $G$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^l$  pour un certain  $l \in \mathbb{N}$ . Le système d'EDO (1) est linéaire si  $F$  est linéaire en  $\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, \dots, \frac{d^k \vec{x}}{dt^k}$ . Autrement, il est non-linéaire. Il est linéaire homogène s'il est linéaire et  $\vec{G}(t) = 0$ . Il est plutôt linéaire inhomogène s'il est linéaire et  $\vec{G}(t) \neq 0$ .

Quitte à augmenter le nombre de fonctions et d'équations, on peut toujours transformer un système d'EDO d'ordre  $k$  en un système d'EDO d'ordre 1. En effet, pour le système d'EDO (1), il suffit d'introduire les nouvelles fonctions  $\vec{w}_1 = \frac{d\vec{x}}{dt}, \dots, \vec{w}_{k-1} = \frac{d^{k-1}\vec{x}}{dt^{k-1}}$ .

Le système d'EDO d'ordre  $k$  (1) correspond alors au système d'EDO d'ordre 1

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{w}_1, \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{w}_1}{dt} = \vec{w}_2, \quad (3)$$

$$\vdots \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{w}_{k-2}}{dt} = \vec{w}_{k-1}, \quad (5)$$

$$F(t, \vec{x}, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}, \frac{d\vec{w}_{k-1}}{dt}) = G(t). \quad (6)$$

$$(7)$$

Sans perte de généralité et sauf mention contraire, on se restreindra à un système d'EDO d'ordre 1. De plus, on se restreindra à des systèmes d'EDO d'ordre 1 de la forme :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x}), \quad (8)$$

où  $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\vec{F}(t, \vec{x}) = (F_1(t, \vec{x}), \dots, F_n(t, \vec{x}))$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $F_j$  une fonction à valeurs réelles pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

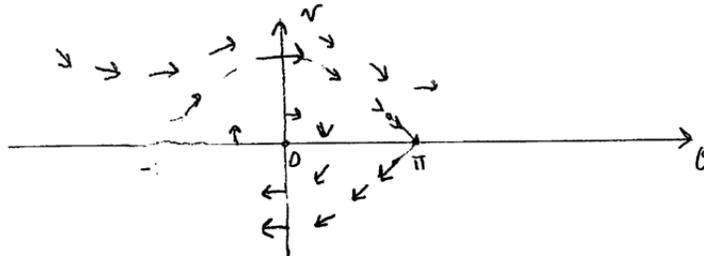
Dans la terminologie du cours *MAT2411-Équation aux dérivées partielles et physique mathématiques*, pour  $t$  fixé, la fonction  $\vec{F}(t, \cdot)$  peut être vue comme un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ . La fonction  $\vec{F}$  peut donc être vue comme un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$  variant avec le temps.

**Remarque 1.3.** *Le système d'EDO (7) est complet au sens où il possède le même nombre d'équations que de fonctions inconnues.*

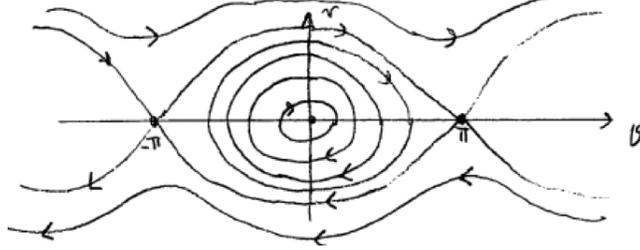
**Exemple 1.4.** : *En introduisant la fonction  $v = \frac{d\theta}{dt}$ , l'équation du pendule  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$  se ramène au système d'EDO*

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) \end{cases}$$

*Dans le plan  $(\theta, v)$ , la fonction  $\vec{F}(\theta, v) = (v, -\frac{g}{\ell} \sin(\theta))$  correspond à un champ de vecteurs qu'on peut illustrer comme suit :*



L'image d'une solution  $(\theta(t), v(t))$  de ce système dans le plan  $(\theta, v)$  induit une courbe partout tangente au champ de vecteurs  $\vec{F}(\theta, v)$ . Voici quelques exemples :



Pour le système (8), on a le résultat fondamental suivant.

**Théorème 1.5** (Existence et unicité). *Considérons le système d'EDO (8),  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x})$  avec conditions initiales  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ . Si les fonctions  $F_1, \dots, F_n$  et  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  sont continues dans une région  $R$  de la forme*

$$R = \{(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \alpha < t < \beta, \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n\}$$

et si  $(t_0, \vec{x}_0) \in R$ , alors le problème aux conditions initiales  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{x})$ ,  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  possède une unique solution  $\vec{x}(t)$  ayant un graphe contenu dans  $R$  et passant par  $(t_0, \vec{x}_0)$ .

La preuve sera présentée dans le prochain chapitre. Pour l'instant, indiquons quelques applications de ce théorème dans le cas où le système est linéaire.

## 1.2 Systèmes linéaires

Lorsque le système (8) est linéaire, les fonctions  $F_j$  du Théorème 1.5 prennent la forme

$$F_j(t, x_1, \dots, x_n) = a_{j1}(t)x_1 + \dots + a_{jn}(t)x_n + g_j(t).$$

En notation matricielle, le système prend donc la forme

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x} + \vec{g}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le Théorème 1.5 donne lieu aux résultats suivants.

**Corollaire 1.6.** *Si les fonctions à valeurs matricielles et vectorielles  $\mathbb{A}(t)$  et  $\vec{g}(t)$  sont continues sur un intervalle ouvert  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in I$ , alors le problème aux conditions initiales  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x} + \vec{g}(t)$ ,  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  possède une solution unique dans l'intervalle  $I$  pour tout  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

**Corollaire 1.7.** Si les fonctions  $\mathbb{A}(t)$  et  $\vec{g}(t)$  sont continues sur un intervalle ouvert  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in I$ , alors l'espace des solutions du système d'EDO

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x} + \vec{g}(t) \quad \text{sur } I$$

est un espace affine de dimension  $n$ . Si  $\vec{g}(t) = 0$ , c'est canoniquement un espace vectoriel de dimension  $n$  ayant pour origine la solution triviale  $\vec{x}(t) \equiv 0$ .

En particulier, si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , alors pour  $t_0 \in I$  fixé, on obtient une base de l'espace des solutions lorsque  $\vec{g}(t) \equiv 0$  en prenant  $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$  avec  $\vec{x}_i(t)$  l'unique solution telle que

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \mathbb{A}(t)\vec{x}_i(t) \quad \text{et} \quad \vec{x}_i(t_0) = e_i.$$

**Définition 1.8.** Des fonctions  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  sont linéairement dépendantes sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  s'il existe des constantes  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  qui ne sont pas toutes nulles et telles que

$$c_1\vec{x}_1(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Autrement, elles sont linéairement indépendantes.

Lorsqu'on a  $n$  fonctions  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut leur associer la fonction à valeurs matricielles

$$\mathbb{X}(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{x}_1(t) & \cdots & \vec{x}_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ayant pour colonne  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ . On définit le wronskien de  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  par

$$W(t) = W(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)) := \det(\mathbb{X}(t)).$$

**Lemme 1.9.** S'il existe  $t_0 \in I$  tel que  $W(t_0) \neq 0$ , alors les fonctions  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  sont linéairement indépendantes sur  $I$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} W(t_0) \neq 0 &\Rightarrow \vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0) \text{ sont des vecteurs linéairement indépendants} \\ &\Rightarrow [c_1\vec{x}_1(t_0) + \dots + c_n\vec{x}_n(t_0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = \dots = c_n = 0] \\ &\Rightarrow [c_1\vec{x}_1(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t) = 0 \quad \forall t \in I \Leftrightarrow c_1 = \dots = c_n = 0] \\ &\Rightarrow \vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t) \text{ sont des fonctions linéairement indépendantes sur } I. \end{aligned}$$

□

**Théorème 1.10.** Soit  $\mathbb{A}(t)$  une fonction continue à valeurs matricielles sur un intervalle ouvert  $I$ . Si  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  sont des solutions du système linéaire homogène  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}(t)\vec{x}$  sur  $I$ , alors soit  $W(t) \equiv 0$  partout sur  $I$ , soit  $W(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ .

*Démonstration.* En utilisant la forme de Jordan d'une matrice (e.g. une matrice diagonale associée lorsque la matrice est diagonalisable), on montre dans l'Exercice 1 de la § 1.4 que pour  $\mathbf{M}(t)$ , une fonction différentiable à valeurs dans les matrices inversibles,

$$\frac{d}{dt} \det(\mathbf{M}(t)) = \text{Tr} \left( \mathbf{M}(t)^{-1} \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) \det(\mathbf{M}(t)).$$

Pour le wronskien  $W(t)$ , cela implique que si  $W(t_0) \neq 0$  pour un certain  $t_0 \in I$ , alors :

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \det(\mathbf{X}(t)) &= \text{Tr} \left( \mathbf{X}(t)^{-1} \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right) \det(\mathbf{X}(t)) \\ &= \text{Tr} (\mathbf{X}(t)^{-1} \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t)) W(t) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{A}(t)) W(t), \text{ car } \text{Tr}(CD) = \text{Tr}(DC). \end{aligned}$$

Ainsi,  $W(t)$  est une solution d'une EDO linéaire d'ordre 1. En appliquant la méthode des facteurs intégrants (MAT2191), la solution est donc :

$$W(t) = C \exp \left( \int_{t_0}^t \text{Tr}(\mathbf{A}(\tau)) d\tau \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme  $W(t_0) \neq 0$ ,  $C \neq 0$  et donc  $W(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ . Cela donne bien la dichotomie souhaitée.  $\square$

**Proposition 1.11.** *Pour les équations précédentes, les solutions  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  sont linéairement dépendantes sur  $I$  si et seulement si leur wronskien s'annule identiquement sur  $I$ .*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) C'est la contraposée du lemme précédent.

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $W(t) = 0$  pour tout  $t \in I$ . Pour  $t_0 \in I$  fixé, l'équation

$$c_1 \vec{x}_1(t_0) + \dots + c_n \vec{x}_n(t_0) = 0$$

possède une solution  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Par le principe de superposition, la fonction

$$\vec{\phi}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t)$$

est alors une solution du système sur  $I$  telle que  $\vec{\phi}(t_0) = 0$ . Par l'unicité de solution,  $\vec{\phi}(t) \equiv 0$  sur  $I$ , donc

$$c_1 \vec{x}_1(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t) = \vec{\phi}(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

ce qui montre que  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  sont des solutions linéairement indépendantes.  $\square$

Si  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  sont les solutions linéairement indépendantes du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{x}$  sur l'intervalle  $I$ , alors la matrice

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{x}_1(t) & \cdots & \vec{x}_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ayant pour vecteurs les solutions  $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$  est une matrice fondamentale pour le système.

Pour  $t_0 \in I$  et  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , on peut trouver  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{x}_0 = c_1 \vec{x}_1(t_0) + \dots + c_n \vec{x}_n(t_0)$ . Autrement dit, en posant

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

on a que :  $\vec{x}_0 = \Psi(t_0)\vec{c}$  et l'unique solution du système telle que  $\vec{x}_0(t_0) = \vec{x}_0$  est donnée par :

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + \dots + c_n \vec{x}_n(t) = \Psi(t)\vec{c}$$

avec  $\vec{c}$  l'unique vecteur tel que  $\vec{x}_0 = \Psi(t_0)\vec{c}$ .

Autrement dit, comme  $\det \Psi(t_0) = W(t_0) \neq 0$ , alors  $\Psi(t_0)$  est inversible et  $\vec{c} = \Psi(t_0)^{-1} \vec{x}_0$ , de sorte que  $\vec{x}(t) = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1} \vec{x}_0$  est l'unique solution du système telle que  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ . On a obtenu le résultat suivant.

**Théorème 1.12.** *Si  $\Psi(t)$  est une matrice fondamentale d'un système, alors pour  $t_0 \in I$  et  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{x}(t) = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1} \vec{x}_0$  est l'unique solution telle que  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ .*

**Théorème 1.13.** *Si  $\mathbb{A}(t)$  ne dépend pas de  $t$ , alors une matrice fondamentale du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  est donnée par*

$$\Psi(t) = \exp(t\mathbb{A}) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathbb{A})^k}{k!}$$

*Démonstration.* Si on définit

$$\|\mathbb{A}\| = \sup_{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbb{A}\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}, \quad (9)$$

alors  $\|\cdot\|$  est une norme sur l'espace des matrices  $n \times n$ . De plus,  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  par l'Exercice 4 de la § 1.4. Ainsi,  $\|(t\mathbb{A})^k\| \leq t^k \|\mathbb{A}\|^k$ , donc la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathbb{A})^k}{k!}$$

converge dans cette norme en comparant avec la série de la fonction exponentielle  $e^{t\|\mathbb{A}\|}$ . On peut aussi calculer sa dérivée en dérivant terme à terme (on utilise le cours d'analyse II et la convergence uniforme pour montrer que la fonction est différentiable et que ses dérivées sont obtenues en dérivant terme à terme) :

$$\frac{d}{dt} \exp(t\mathbb{A}) = \frac{d}{dt} \left( \text{Id} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^k t^k}{k!} \right) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{A}^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbb{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^k t^k}{(k)!} = \mathbb{A} \exp(t\mathbb{A}).$$

De plus, en  $t = 0$ ,  $\exp(0\mathbb{A}) = \text{Id}$  est la matrice identité. Donc  $\det(\exp(0\mathbb{A})) = 1 \neq 0$ , donc les colonnes de  $\exp(t\mathbb{A})$  sont des solutions linéairement indépendantes du système et  $\Psi(t)$  est bien une matrice fondamentale. □

**Avertissement** : Si  $\mathbb{A}(t)$  dépend de  $t$ ,  $\exp(t\mathbb{A})$  n'est pas une matrice fondamentale en général.

En pratique, lorsque  $\mathbb{A}$  est diagonalisable, il est plus facile de calculer la matrice exponentielle à partir d'une matrice diagonale associée. Si  $\mathbb{A} = \mathbb{X}\Lambda\mathbb{X}^{-1}$  avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors  $\mathbb{A}^n = (\mathbb{X}\Lambda\mathbb{X}^{-1})^n = \mathbb{X}\Lambda^n\mathbb{X}^{-1}$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \exp(t\mathbb{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathbb{A})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{X}\Lambda^k\mathbb{X}^{-1}}{k!} = \mathbb{X} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\Lambda)^k}{k!} \right) \mathbb{X}^{-1} = \mathbb{X} (\exp(t\Lambda)) \mathbb{X}^{-1} \\ &= \mathbb{X} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \mathbb{X}. \end{aligned} \tag{10}$$

**Exemple 1.14.** Si  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $\mathbb{A}$  est une matrice de permutation. Une base de vecteurs propres est donnée par  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  avec valeurs propres 1 et  $-1$  respectivement. Le changement de base de  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  vers la base canonique est implémenté par la matrice  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , ayant pour colonnes  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  puisque  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ . Ainsi, on a la relation :

$$U\Lambda U^{-1} = \mathbb{A} \text{ avec } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

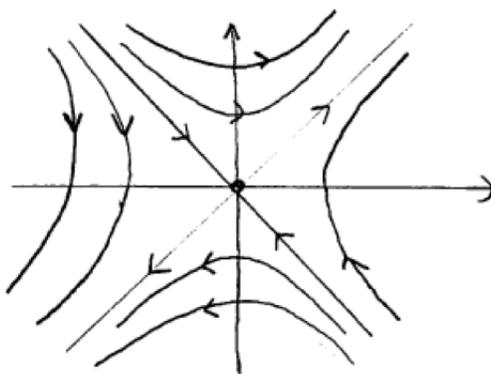
On calcule que  $U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , ainsi une matrice fondamentale du système est donnée par

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \exp(t\Lambda) \\ &= U \exp(t\Lambda) U^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  et  $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ . Si en  $t = 0$ ,  $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , la solution est donnée par

$$\vec{x}(t) = \Psi(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \cosh(t) + b \sinh(t) \\ a \sinh(t) + b \cosh(t) \end{pmatrix}$$

Voici les trajectoires de certaines solutions dans le plan  $\mathbb{R}^2$  :



Sauf pour la solution triviale et pour les solutions contenues dans un espace propre de  $\mathbb{A}$ , les trajectoires des solutions sont des branches d'hyperboles.

**Exemple 1.15** (Oscillateur harmonique). : On considère l'équation du mouvement d'une masse  $m$  attachée à un ressort de constante de Hooke  $k$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pour se ramener à un système d'ordre 1, posons  $y := \frac{dx}{dt}$ , ce qui donne le système

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x} \quad \text{avec} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouvons les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\mathbb{A}$  :

$$0 = \det(\mathbb{A} - \lambda \text{Id}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\omega. \quad (11)$$

Si  $\lambda = i\omega$  :

$$0 = \begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega x + y \\ -\omega^2 x - i\omega y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = i\omega x, \quad (12)$$

de sorte que

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de valeur propre  $i\omega$ .

Si  $\lambda = -i\omega$  :

$$\vec{v}_2 = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix} \quad (13)$$

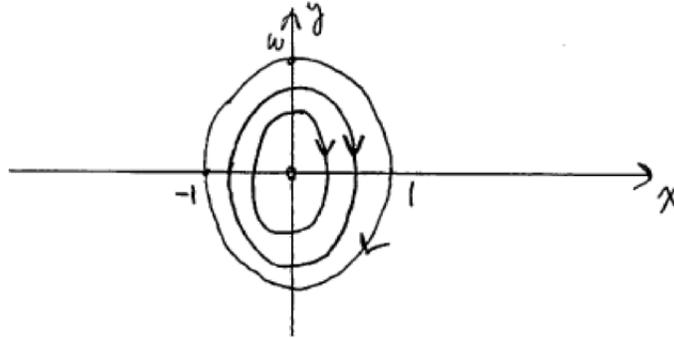
est un vecteur propre de valeur propre  $-i\omega$ . Ainsi,  $U = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}$  est la matrice de changement de la base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  vers la base canonique. L'inverse de  $U$  est donné par :

$$U^{-1} = \frac{i}{2\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\omega^{-1} \\ 1 & i\omega^{-1} \end{pmatrix}$$

Une matrice fondamentale est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \exp(t\mathbb{A}) \\ &= U \exp(t\Lambda) U^{-1} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it\omega} & 0 \\ 0 & e^{-it\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i\omega^{-1} \\ 1 & i\omega^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{it\omega} & e^{-it\omega} \\ i\omega e^{it\omega} & -i\omega e^{-it\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i\omega^{-1} \\ 1 & i\omega^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{it\omega} + e^{-it\omega} & -i\omega^{-1}e^{it\omega} + i\omega^{-1}e^{-it\omega} \\ i\omega e^{it\omega} - i\omega e^{-it\omega} & e^{it\omega} + e^{-it\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \omega^{-1} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Voici quelques trajectoires dans le plan  $(x, y)$ . Sauf pour la solution triviale, les trajectoires sont des ellipses :



**Exemple 1.16** (Oscillateur harmonique amorti). Si on ajoute de la friction au problème, l'équation devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ pour une constante } \gamma > 0$$

Le système d'ordre 1 correspondant est :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x} \text{ avec } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Trouvons les valeurs propres et les vecteurs propres en supposant que  $\gamma < 2\omega$ .

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A} - \lambda \text{Id}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-\gamma - \lambda) + \omega^2 \\ &= \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2}$$

Posons  $\nu = \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$  de sorte que  $\lambda = \frac{-\gamma}{2} \pm \frac{i\nu}{2}$ .

Si  $\lambda = \frac{-\gamma}{2} + \frac{i\nu}{2}$  :

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} - \frac{i\nu}{2} & 1 \\ -\omega^2 & -\frac{\gamma}{2} - \frac{i\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\frac{-\gamma+i\nu}{2})x + y \\ -\omega^2 x + (\frac{-\gamma}{2} - \frac{i\nu}{2})y \end{pmatrix} \Rightarrow y = \left(\frac{-\gamma + i\nu}{2}\right)x, \quad (14)$$

de sorte que

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\gamma + i\nu \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de valeur propre  $\frac{-\gamma+i\nu}{2}$ .

Si  $\lambda = \frac{-\gamma}{2} - \frac{i\nu}{2}$  :

$$\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\gamma - i\nu \end{pmatrix} \quad (15)$$

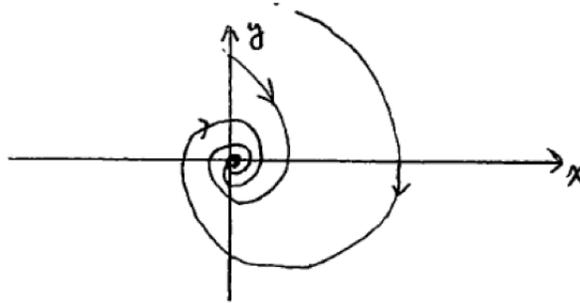
est un vecteur propre de valeur propre  $\frac{-\gamma - i\nu}{2}$ . Alors,  $U = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -\gamma + i\nu & -\gamma - i\nu \end{pmatrix}$  est la matrice de changement de base avec inverse

$$U^{-1} = \frac{i}{4\nu} \begin{pmatrix} -\gamma - i\nu & -2 \\ \gamma - i\nu & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que  $U\Lambda U^{-1} = \mathbb{A}$  avec  $\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma + i\nu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\gamma - i\nu}{2} \end{pmatrix}$ . Ainsi, on calcule que :

$$\begin{aligned} \exp(t\mathbb{A}) &= U \exp(t\Lambda) U^{-1} \\ &= \frac{i}{4\nu} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -\gamma + i\nu & \gamma - i\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{-\gamma t}{2}} e^{\frac{i\nu t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\gamma t}{2}} e^{-\frac{i\nu t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma - i\nu & -2 \\ \gamma - i\nu & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{ie^{\frac{-\gamma t}{2}}}{4\nu} \begin{pmatrix} 2e^{\frac{i\nu t}{2}} & 2e^{-\frac{i\nu t}{2}} \\ (-\gamma + i\nu)e^{\frac{i\nu t}{2}} & (-\gamma - i\nu)e^{-\frac{i\nu t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma - i\nu & -2 \\ \gamma - i\nu & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{\frac{-\gamma t}{2}}}{4\nu} \begin{pmatrix} 4\gamma \sin(\frac{\nu t}{2}) + 4\nu \cos(\frac{\nu t}{2}) & 8\sin(\frac{\nu t}{2}) \\ -2(\gamma^2 + \nu^2)\sin(\frac{\nu t}{2}) & -4\gamma \sin(\frac{\nu t}{2}) + 4\nu \cos(\frac{\nu t}{2}) \end{pmatrix} \\ &= e^{\frac{-\gamma t}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\nu} \sin(\frac{\nu t}{2}) + \cos(\frac{\nu t}{2}) & 2\nu \sin(\frac{\nu t}{2}) \\ -\frac{(\gamma^2 + \nu^2)}{2\nu} \sin(\frac{\nu t}{2}) & -\frac{\gamma}{\nu} \sin(\frac{\nu t}{2}) + \cos(\frac{\nu t}{2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sauf pour la solution triviale, les trajectoires des solutions sont des spirales s'approchant de l'origine :



Pour calculer l'exponentielle d'une matrice qui n'est pas diagonalisable, on peut utiliser sa forme de Jordan.

**Définition 1.17.** Un vecteur propre généralisé d'une matrice  $\mathbb{A}$  est un vecteur  $\vec{v}$  tel qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$  tels que  $(\mathbb{A} - \lambda \text{Id})^k \vec{v} = 0$ . Dans ce cas,  $\lambda$  est la valeur propre associée. L'ordre de

$\vec{v}$  est le plus petit entier  $k \in \mathbb{N}_0$  tel que  $(\mathbb{A} - \lambda \text{Id})^n \vec{v} = 0$ .

**Remarque 1.18.** Un vecteur propre non-nul est un vecteur propre généralisé d'ordre 1.

**Remarque 1.19.** Si  $\vec{v} \neq 0$  est un vecteur propre généralisé d'ordre  $k$  avec valeur propre  $\lambda$ , alors  $(\mathbb{A} - \lambda \text{Id})^i \vec{v} = 0$  est un vecteur propre généralisé d'ordre  $k - i$ .

**Théorème 1.20** (Jordan, MAT1260-Algèbre linéaire II). Soit  $\mathbb{A}$  une matrice complexe  $n \times n$ . Alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}^n$  constituée de vecteurs propres généralisés de  $\mathbb{A}$ . De plus, si  $\vec{v} \in \mathcal{B}$  est un vecteur propre généralisé d'ordre  $k$  et de valeur propre  $\lambda$ , alors  $(\mathbb{A} - \lambda \text{Id})^j \vec{v} \in \mathcal{B}$  pour  $j \in \{0, \dots, k - 1\}$ .

**Remarque 1.21.** On obtient la forme de Jordan de  $\mathbb{A} - \lambda \text{Id}$  en décrivant l'action de  $\mathbb{A}$  en termes de la base  $B$  du théorème. Si  $\vec{v}$  est un vecteur propre généralisé de  $\mathbb{A}$  d'ordre  $k$  avec valeur propre  $\lambda$ , remarquons que :

$$\mathbb{A}^j \vec{v} = (\mathbb{A} - \lambda \text{Id} + \lambda \text{Id})^j \vec{v} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \lambda^i (\mathbb{A} - \lambda \text{Id})^{j-i} \vec{v}$$

puisque  $\mathbb{A} - \lambda \text{Id}$  et  $\lambda \text{Id}$  sont des matrices qui commutent. On a plus généralement que :

$$\begin{aligned} \exp(t\mathbb{A})\vec{v} &= \exp(t\mathbb{A} - \lambda \text{Id} + \lambda \text{Id})\vec{v} \\ &= e^{t\lambda} \exp(t(\mathbb{A} - \lambda \text{Id}))\vec{v} \\ &= e^{t\lambda} \left( \sum_{q=0}^{k-1} \frac{t^q (\mathbb{A} - \lambda \text{Id})^q}{q!} \vec{v} \right) \text{ puisque } \vec{v} \text{ est d'ordre } k. \end{aligned}$$

**Remarque 1.22.** La forme de Jordan d'une matrice  $\mathbb{A}$  est de la forme  $\mathbb{J} = \Lambda + N$  où :

1.  $\Lambda$  est une matrice diagonale ayant comme entrées sur la diagonale les valeurs propres de  $\mathbb{A}$  (incluant les multiplicités).
2.  $N$  est une matrice nilpotente ( $N^k = 0$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ ) commutant avec  $\Lambda$ .

Ainsi,

$$\exp(t\mathbb{J}) = \exp(t\Lambda) \left( \sum_{q=0}^{k-1} \frac{(tN)^q}{q!} \right).$$

**Exemple 1.23.** Considérons l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique dans le régime apériodique critique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

En introduisant la nouvelle fonction  $y = \frac{dx}{dt}$ , on se ramène au système d'ordre 1

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x} \quad \text{avec} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Trouvons les valeurs propres et les vecteurs propres généralisés :

$$0 = \det(\mathbb{A} - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-4 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

$\Rightarrow \lambda = -2$  est l'unique valeur propre :

$$0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -4x - 2y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = -2x \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de valeur propre } -2.$$

Or,  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donc on peut prendre  $\vec{v}_2$  un vecteur linéairement indépendant de  $\vec{v}_1$ .

Ce sera automatiquement un vecteur propre généralisé. Prenons  $\vec{v}_2$  de sorte que  $(\mathbb{A} - \lambda Id)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$  :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -4x - 2y \end{pmatrix} \Rightarrow y = 1 - 2x$$

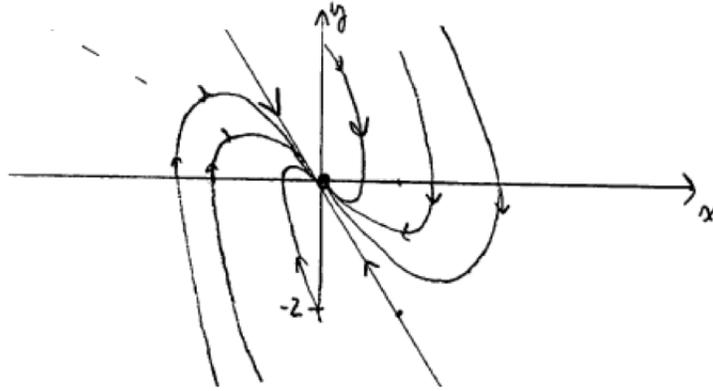
On peut prendre  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La matrice de changement de base est alors

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec inverse } U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \exp(t\mathbb{A}) &= \exp \left( t \left( U \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} U^{-1} \right) \right) \\ &= U \exp \left( t \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right) \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2t & t \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 + 2t & t \\ -2 - 4t + 2 & -2t + 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{-2t} t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Voici quelques trajectoires dans le plan  $(x, y)$  :



### 1.3 Étude des zéros des solutions d'une EDO linéaire d'ordre 2

En s'appuyant sur la section précédente, nous allons maintenant dériver quelques résultats qualitatifs concernant les zéros de solutions d'une EDO linéaire d'ordre 2.

**Théorème 1.24.** Soient  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  des solutions linéairement indépendantes de l'EDO

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0 \quad (16)$$

avec  $P, Q$  des fonctions continues. Alors les zéros de  $x_1$  et  $x_2$  sont distincts et alternent au sens où  $x_1$  s'annule en un seul point entre deux zéros successifs de  $x_2$  et inversement.

*Démonstration.* Le système d'ordre 1 correspondant est

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}(t)\vec{x} \quad \text{avec} \quad y = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix}.$$

Les solutions correspondantes sont  $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix}$  et  $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$ . Ainsi, leur wronskien est

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

Comme on suppose que  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont linéairement indépendantes,  $\vec{x}_1(t)$  et  $\vec{x}_2(t)$  seront aussi linéairement indépendantes, donc  $W(t) \neq 0$  partout où la solution existe. Sans perte de généralité, quitte à interchanger  $x_1$  et  $x_2$ , on peut supposer que  $W(t) > 0$ . Si  $t_1$  est un zéro de  $x_1$ , alors

$$W(t_1) = -x_1'(t_1)x_2(t_1) > 0 \Rightarrow x_2(t_1) \neq 0$$

Similairement, si  $x_2(t_2) = 0$ , alors  $x_1(t_2) \neq 0$ . Les zéros de  $x_1$  et  $x_2$  sont donc distincts.

Supposons maintenant que  $t_1$  et  $t_2$  soient deux zéros successifs de  $x_1$  disons  $t_1 < t_2$ . Alors :

$$\begin{cases} 0 < W(t_1) = -x_1'(t_1)x_2(t_1), \\ 0 < W(t_2) = -x_1'(t_2)x_2(t_2). \end{cases} \quad (17)$$

En particulier,  $x_1'(t_1) \neq 0$  et  $x_1'(t_2) \neq 0$ . Comme  $x_1$  ne possède pas de zéro entre  $t_1$  et  $t_2$ , il faut par le théorème des valeurs intermédiaires que  $x_1'(t_1)$  et  $x_1'(t_2)$  soient de signes opposés. Par (17),  $x_2(t_1)$  et  $x_2(t_2)$  sont aussi de signes opposés, donc par continuité,  $x_2$  a un zéro entre  $t_1$  et  $t_2$ . Si  $x_2$  avait deux zéros entre  $t_1$  et  $t_2$ , alors par le même argument,  $x_1$  aurait un autre zéro entre ces deux zéros, donc entre  $t_1$  et  $t_2$ , contredisant notre hypothèse que  $t_1$  et  $t_2$  sont deux zéros successifs de  $x_1$ . On voit donc que  $x_2$  a précisément un zéro entre  $x_1$  et  $x_2$ . □

**Question 1.25.** *Peut-on mettre l'EDO (16) sous la forme normale  $u'' + q(t)u = 0$  ?*

Posons  $x = uv \Rightarrow x' = u'v + uv', x'' = u''v + 2u'v' + uv''$ . L'EDO devient alors

$$u''v + (2v' + P(t)v)u' + (v'' + P(t)v' + Q(t)v)u = 0.$$

Pour avoir une forme normale, on veut que :

$$2v' + P(t)v = 0 \Rightarrow v = e^{-\frac{1}{2} \int P(t) dt}.$$

Avec ce choix, l'équation devient alors :

$$u'' + q(t)u = 0 \text{ avec } q(t) = \left( \frac{-1}{2}P'(t) - \frac{1}{4}P(t)^2 + Q(t) \right).$$

**Théorème 1.26.** *Si  $q(t)$  est une fonction continue strictement négative, alors une solution non-triviale  $u(t)$  de  $u'' + q(t)u = 0$  possède au plus un zéro.*

*Démonstration.* Supposons que  $u$  s'annule en  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Alors  $u'(t_0) \neq 0$ , car autrement  $u$  a les mêmes conditions initiales en  $t_0$  que la solution triviale, et donc  $u \equiv 0$  par unicité de la solution, contredisant nos hypothèses. Quitte à remplacer  $u$  par  $-u$ , on peut supposer que  $u'(t_0) > 0$ . Alors  $u(t) > 0$  pour  $t > t_0$  près de  $t_0$ . Donc  $u''(t) = -q(t)u(t) > 0$ , ce qui montre que  $u'$  est croissante tant que  $u(t) > 0$ , donc que  $u$  est croissante et strictement positive pour  $t > t_0$ . De même, on montre  $u(t) < 0$  pour  $t < t_0$ , ce qui montre que  $t_0$  est l'unique zéro de  $u$ . □

**Théorème 1.27.** *Soit  $u(t)$  une solution non-triviale de l'équation  $u''(t) + q(t)u(t) = 0$  avec cette fois  $q(t)$  une fonction continue telle que, pour un certain  $c \in \mathbb{R}$ ,  $q(t) > 0$  pour tout  $t > c$  et*

$$\int_1^{\infty} q(t)dt = \infty.$$

*Alors  $u$  possède une infinité de zéros sur  $\mathbb{R}^+$ .*

*Démonstration.* On procède par contradiction et on suppose qu'il existe un nombre fini de zéros dans  $]0, \infty[$ , donc qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que  $u(t) \neq 0 \forall t \geq t_0$ . Quitte à remplacer  $u$  par  $-u$ , on peut supposer

que  $u(t) > 0$  pour  $t \geq t_0$ . Montrons alors que  $u'(t)$  devient négative au-delà d'un certain seuil. Pour ce fait, posons

$$v = \frac{-u'}{u} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{-u''}{u} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = q(t) + v^2.$$

Alors,

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t q(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t v^2(\tau) d\tau \geq v(t_0) + \int_{t_0}^t q(\tau) d\tau.$$

Comme  $\int_1^\infty q(t) dt = \infty$ , on voit alors qu'il existe  $T > t_0$  tel que

$$t > T \quad \Rightarrow \quad v(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad u'(t) < 0.$$

Or, comme  $u''(t) = -q(t)u(t)$ , on voit alors que  $u'$  est aussi décroissante. La fonction  $u$  est donc décroissante et concave, ce qui implique que son graphe devra nécessairement recroiser l'axe des  $t$  pour un  $t > t_0$ , contredisant notre hypothèse. Il faut donc admettre que  $u$  a une infinité de zéros.  $\square$

**Exemple 1.28.** Trouvons la forme normale de l'équation de Bessel d'ordre  $p$  :

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0.$$

On calcule pour  $t \gg 0$  que

$$q(t) = Q(t) - \frac{1}{4}P(t)^2 - \frac{1}{2}P'(t) = \frac{t^2 - p^2}{t^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{2t^2} = 1 - \frac{1 - 4p^2}{4t^2} > 0.$$

**Corollaire 1.29.** Les solutions non-triviales de l'équation de Bessel s'annulent une infinité de fois sur  $]0, \infty[$ .

*Démonstration.* Dans ce cas, il existe  $K_p > 0$  tel que  $q(t) > \frac{1}{2} \quad \forall t > K_p$ , donc

$$\int_{K_p}^\infty q(t) dt = \infty.$$

Le théorème précédent s'applique donc.  $\square$

**Théorème 1.30** (Théorème de comparaison de Sturm). Soient  $y(t)$  et  $z(t)$  des solutions non-triviales de  $y''(t) + q(t)y = 0$ ,  $z''(t) + r(t)z = 0$  avec  $q(t) > r(t) > 0$ , des fonctions continues. Alors  $y$  s'annule au moins une fois entre deux zéros de  $z$ .

*Démonstration.* Soient  $t_1$  et  $t_2$  deux zéros consécutifs de  $z$  avec  $t_1 < t_2$ , de sorte que  $z$  ne s'annule pas sur  $]t_1, t_2[$ . Supposons pour une contradiction que  $y$  ne s'annule pas sur  $]t_1, t_2[$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $y > 0$  et  $z > 0$  sur  $]t_1, t_2[$ . Alors le wronskien  $W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$  est tel que :

$$\frac{d}{dt}W(t) = y'z' + yz'' - y''z - y'z' = yz'' - y''z = y(-rz) - (-yq)z = (q - r)yz > 0 \quad \text{pour } t \in ]t_1, t_2[.$$

Par le théorème des accroissements finis, on a donc que  $W(t_2) > W(t_1)$ . Or, on a aussi que :

$$W(t_1) = y(t_1)z'(t_1) \geq 0 \text{ et } W(t_2) = y(t_2)z'(t_2) \leq 0$$

d'où  $0 \geq W(t_2) > W(t_1) \geq 0$ , une contradiction. Il faut donc admettre que  $y$  a un zéro dans l'intervalle  $]t_1, t_2[$ .  $\square$

**Corollaire 1.31.** *Soit  $y_p$  une solution non-triviale de l'équation de Bessel d'ordre  $p$ . Si  $0 \leq p < \frac{1}{2}$ , chaque intervalle de longueur  $\pi$  possède un zéro de  $y_p$ . Si  $p = \frac{1}{2}$ , la distance entre deux zéros successifs est toujours  $\pi$ . Enfin, si  $p > \frac{1}{2}$ , chaque intervalle de longueur  $\pi$  contient au plus un zéro de  $y_p$ .*

*Démonstration.* Il faut comparer la forme normale  $u'' + (1 - \frac{1-4p^2}{t^2})u = 0$  de l'équation de Bessel avec l'équation  $u'' + u = 0$  (avec  $r = 1$ ). La solution générale de cette équation est  $u(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$ , une fonction périodique de période  $2\pi$  possédant une infinité de zéros, deux zéros successifs étant distants de  $\pi$ . Alors si  $0 < p < \frac{1}{2}$ ,

$$q_p(t) = 1 + \frac{1-4p^2}{t^2} > 1 = r$$

donc  $y_p = vu$  s'annule au moins une fois dans chaque intervalle de longueur  $\pi$ .

Si  $p = \frac{1}{2}$ ,  $q_p(t) = \frac{1}{2}$ , donc  $y_p = v(a \cos(t) + b \sin(t))$  pour des constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ , donc deux zéros successifs de  $y_p$  sont toujours distants de  $\pi$ .

Enfin, si  $p > \frac{1}{2}$ , alors

$$q_p(t) = 1 + \frac{1-4p^2}{t^2} < 1 = r,$$

donc par le théorème précédent, en comparant avec une solution de  $u'' + u = 0$ ,  $y_p$  s'annule au plus une fois dans un intervalle de longueur  $\pi$ .  $\square$

## 1.4 Exercices

1. Soit  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  le groupe des matrices  $n$  par  $n$  inversibles ayant des entrées complexes. Notons que  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  est un sous-ensemble ouvert de  $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ , l'ensemble de toutes les matrices  $n$  par  $n$  à entrées complexes. Le déterminant peut être vu comme une fonction  $\det : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ .
  - (a) Si  $t \mapsto \mathbb{A}(t) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  est une application différentiable telle que  $\mathbb{A}(t_0)$  est diagonalisable pour un certain  $t_0 \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$\frac{d}{dt}(\det \mathbb{A})(t_0) = \det(\mathbb{A}(t_0)) \text{Tr} \left( \mathbb{A}(t_0)^{-1} \frac{d\mathbb{A}}{dt}(t_0) \right). \quad (18)$$

- (b) En utilisant le fait que les matrices ayant des valeurs propres distinctes sont denses dans  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  (voir par exemple [HSD13, § 5.6]), déduire que la formule (18) reste valide même si  $\mathbb{A}(t_0)$  n'est pas diagonalisable.

2. On considère le système linéaire  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  avec  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ .
- Trouver une matrice fondamentale pour ce système.
  - Tracer quelques trajectoires de solutions dans l'espace des phases.
  - Ce système provient-il de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti ?
3. On considère le système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \vec{x}$  pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $bc < 0$ .
- Trouver la solution générale de ce système.
  - Tracer quelques trajectoires de solutions dans l'espace des phases en distinguant trois cas :  $a > 0$ ,  $a = 0$  et  $a < 0$ .

4. Pour  $n \in \mathbb{N}_0$ , on considère la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}.$$

- Montrer que  $\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
  - Montrer que  $\frac{d}{dx}(x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}_0$ .
  - Utiliser a) pour montrer que  $J'_n(x) + \frac{n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
  - Utiliser b) pour montrer que  $J'_n(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = -J_{n+1}(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}_0$ .
5. En utilisant le théorème de Rolle et le numéro précédent, montrer, pour  $n \in \mathbb{N}_0$ , que les zéros de  $J_n$  et  $J_{n+1}$  alternent.
6. En trouvant explicitement les solutions à l'équation d'Euler

$$y'' + \frac{k}{x^2} y = 0, \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{R},$$

montrer qu'une solution non-triviale possède une infinité de zéros lorsque  $k > 1/4$ , mais seulement un nombre fini lorsque  $k \leq 1/4$ .

7. Si  $y(x)$  est une solution non-triviale de l'équation

$$y'' + q(x)y = 0, \quad x > 0,$$

montrer que  $y(x)$  possède une infinité de zéros si  $q(x) > \frac{k}{x^2}$  pour tout  $x > 0$  et pour un certain  $k > 1/4$ , mais seulement un nombre fini si plutôt  $q(x) < \frac{1}{4x^2}$  pour tout  $x > 0$ . *Indice : Utiliser le théorème de comparaison de Sturm et le numéro précédent.*

8. On considère l'équation  $x''(t) + (1 + \cos^2 t)x(t) = 0$ .
- Montrer que toute solution non-triviale possède une infinité de zéros dans l'intervalle  $[0, \infty)$ .
  - Montrer que pour toute solution non-triviale, la distance entre deux zéros successifs est toujours d'au moins  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .

## 2 Les théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires



Dans ce chapitre, nous allons établir les résultats constituant la base de la théorie des EDO, notamment les théorèmes d'existence, d'unicité et de régularité des solutions d'un système d'EDO.

### 2.1 Existence et unicité des solutions

Comme le montre les exemples suivants, l'existence et l'unicité d'une solution ne sont pas toujours garanties.

**Exemple 2.1.** *L'EDO*

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

*ne possède pas de solution telle que  $x(0) = 0$ . En effet, si une telle solution existait, comme  $\frac{dx}{dt}(0) = -1$ , il faudrait que  $x(t)$  soit strictement négatif pour  $t > 0$  petit, donc par le théorème des accroissements finis, il existerait  $t_0 > 0$  tel que  $\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{x(t_0) - x(0)}{t_0} < 0$  et  $x(t_0) < 0$ , en contradiction avec notre*

hypothèse que  $x(t)$  est une solution de l'EDO. Remarquons que le terme de droite dans l'EDO n'est pas continu en  $x = 0$ .

**Exemple 2.2.** L'EDO

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}}$$

possède deux solutions telles que  $x(0) = 0$ . En effet, la solution triviale  $x_1(t) \equiv 0$  est l'une de ces solutions, et  $x_2(t) = t^3$  est une autre solution. En fait,  $\forall \tau > 0$ , la fonction

$$u_\tau(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \tau, \\ (t - \tau)^3 & \text{si } t > \tau, \end{cases}$$

est aussi une solution. Remarquons dans ce cas que la fonction  $3x^{\frac{2}{3}}$  n'est pas différentiable en  $x = 0$ .

Ces exemples montrent qu'il faut faire certaines hypothèses pour obtenir des résultats d'existence ou d'unicité.

**Définition 2.3.** Un espace métrique est un ensemble  $E$  muni d'une fonction  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  ;
2.  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$  ;
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E$  (inégalité du triangle).

L'espace métrique est complet si toute suite  $\{x_k\} \subseteq E$  qui est de Cauchy (i.e.  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $m \geq n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$ ) converge dans  $E$ .

**Exemple 2.4.**  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique usuelle ( $d(x, y) = |x - y|$ ) est un espace métrique complet.

**Définition 2.5.** Une application  $A : E \rightarrow E$  d'un espace métrique  $(E, d)$  dans lui-même est contractante s'il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que

$$d(A(x), A(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y \in E.$$

**Théorème 2.6** (Théorème du point fixe). Une application contractante  $A : E \rightarrow E$  définie sur un espace métrique complet  $(E, d)$  possède un unique point fixe  $x_0 \in E$ , i.e. un point  $x_0$  tel que  $A(x_0) = x_0$ .

*Démonstration.* Si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux points fixes, alors

$$d(x_1, x_2) = d(A(x_1), A(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda)d(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Il y a donc au plus un point fixe. Si  $x \in E$ , alors  $x_k = A^k x$  est une suite de Cauchy. En effet,

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(A^{k+1}(x), A^k(x)) \leq \lambda^k d(A(x), x)$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k d(A(x), x) = \frac{d(A(x), x)}{1 - \lambda}$$

converge, donc pour  $\ell \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} d(x_{k+\ell}, x_k) &\leq d(x_{k+\ell}, x_{k+\ell-1}) + \cdots + d(x_{k+1}, x_k) = \sum_{j=k}^{\ell-1} \lambda^j d(A(x), x) \\ &\leq \lambda^k \frac{d(A(x), x)}{1 - \lambda} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Comme  $E$  est complet, la suite converge donc, disons vers  $x_\infty \in E$ . Alors  $x_\infty$  est le point fixe recherché, car

$$\begin{aligned} A(x_\infty) &= A\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} A(x_k), \quad \text{car } A \text{ étant contractante, elle est continue,} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{k+1}(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} \\ &= x_\infty. \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.7.** Les points  $x, A(x), A^2(x), \dots$  sont appelés approximations successives du points fixe  $x_\infty$ . Si  $x$  est une telle approximation, on évalue aisément sa précision :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1 - \lambda} \Rightarrow d(x, x_\infty) \leq \sum_{k=0}^{\infty} d(A^k(x), A^{k+1}(x)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k d(x, A(x)) = \frac{d(x, A(x))}{1 - \lambda}.$$

On considère maintenant le système d'EDO d'ordre 1

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \tag{19}$$

avec condition initiale  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ , où  $\vec{v} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteurs sur l'espace des phases élargi  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

**Définition 2.8.** L'application de Picard est une application  $A$  qui à une fonction  $t \mapsto \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  associe la nouvelle fonction  $t \mapsto A\vec{x}(t)$  donnée par :

$$A\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(\vec{x}(\tau), \tau) d\tau.$$

L'application de Picard permet de présenter le système d'EDO en termes d'intégration plutôt que de différentiation :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \Leftrightarrow \vec{x}(t) = A\vec{x}(t).$$

La stratégie pour établir le théorème d'existence et d'unicité est la suivante : montrer que  $A$  est une application contractante sur un espace métrique complet et appliquer le théorème du point fixe. Pour y arriver, il faut introduire quelques notions préliminaires.

**Définition 2.9.** Une application  $A : E_1 \rightarrow E_2$  entre deux espaces métriques  $(E_1, d_1)$  et  $(E_2, d_2)$  satisfait à la condition de Lipschitz s'il existe une constante positive  $L$  telle que  $d_2(A(x), A(y)) \leq Ld_1(x, y)$  pour tout  $x, y \in E_1$ . On dit aussi que  $A$  est lipschitzienne (de rapport  $L$ ).

Lorsque  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ , on peut utiliser les métriques induites par celles de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 2.10.** Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continûment différentiable. Alors  $f$  restreinte à un sous-ensemble  $\mathcal{V}$  compact et convexe satisfait à la condition de Lipschitz de rapport

$$L = \sup_{x \in \mathcal{V}} |df_x|,$$

où

$$|df_x| = \sup_{\vec{w} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{|df_x(\vec{w})|}{|\vec{w}|}.$$

*Démonstration.* Pour  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ , soit  $\vec{z}(t) = (1-t)\vec{x} + t\vec{y}$  le segment les joignant pour  $t \in [0, 1]$ . Alors

$$\begin{aligned} |f(\vec{y}) - f(\vec{x})| &= |f(\vec{z}(1)) - f(\vec{z}(0))| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\vec{z}(t)) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 df_{\vec{z}(t)}(\vec{y} - \vec{x}) dt \right| \\ &\leq \left( \int_0^1 |df_{\vec{z}(t)}| dt \right) |\vec{y} - \vec{x}| \\ &\leq \int_0^1 L dt |\vec{y} - \vec{x}| \\ &= L |\vec{y} - \vec{x}|. \end{aligned}$$

□

Revenons au système d'EDO  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  et supposons que l'application  $\vec{v}$  est continue, ainsi que  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Pour  $(\vec{x}_0, t_0) \in \mathcal{U}$  quelconque, considérons le cylindre

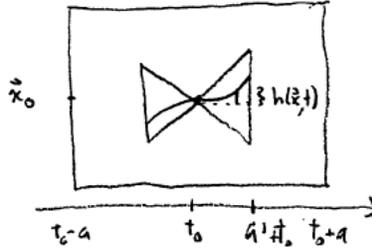
$$S := \{(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |t - t_0| < a, |\vec{x} - \vec{x}_0| < b\}$$

avec  $a, b > 0$  choisis suffisamment petit pour que  $\bar{S} \subset \mathcal{U}$ . Comme  $\bar{S}$  est compact, il existe des bornes supérieures  $C \geq 0$  et  $L \geq 0$  à  $|\vec{v}|$  et  $|\vec{v}_*|$  sur  $S$ , où  $|\vec{v}_*|$  dénote la différentielle spatiale de  $\vec{v}$ , donc par

rapport à  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  pour  $t$  fixé. Soit  $K_0$  un cône de sommet  $(\vec{x}_0, t_0)$  donné par

$$K_0 = \{(\vec{x}, t) \mid |t - t_0| < a', \ |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq C|t - t_0|\}.$$

Si  $a' > 0$  est suffisamment petit,  $K_0 \subset S$ . Si  $b' > 0$  est suffisamment petit, le cône  $K_x = K_0 + (\vec{x} - \vec{x}_0)$  de sommet  $(\vec{x}, t_0)$  est aussi contenu dans  $S$  pour  $|\vec{x} - \vec{x}_0| < b'$ .



Pour de tels choix de  $a'$  et  $b'$ , cherchons une solution  $\vec{\varphi}(t)$  du système d'EDO tel que  $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}$  et mettons-la sous la forme  $\vec{\varphi}(t) = \vec{x} + \vec{h}(\vec{x}, t)$ . Par le théorème des accroissements finis, la courbe intégrale (i.e. son graphe dans l'espace des phases élargi  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ) d'une telle solution est contenue dans  $K_x$  pour  $|t - t_0| < a'$ .

Considérons le cylindre

$$\bar{S}_{a', b'} = \{(\vec{x}, t) \mid |t - t_0| \leq a', \ |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq b'\}$$

et l'espace

$$E = \left\{ \vec{h} : \bar{S}_{a', b'} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \vec{h} \text{ est continue et } |\vec{h}(\vec{x}, t)| \leq C|t - t_0| \ \forall (\vec{x}, t) \in \bar{S}_{a', b'} \right\}.$$

En particulier,  $\vec{h} \in E \Rightarrow \vec{h}(\vec{x}, t_0) = 0$ . Sur  $E$ , considérons la métrique

$$d_E(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = \|\vec{h}_1 - \vec{h}_2\|_E := \max_{(\vec{x}, t) \in \bar{S}_{a', b'}} |\vec{h}_1(\vec{x}, t) - \vec{h}_2(\vec{x}, t)|.$$

Par l'Exercice 3 de la § 2.6,  $d_E$  est bien une métrique et  $\|\cdot\|_E$  est une norme.

**Théorème 2.11.**  $(E, d_E)$  est un espace métrique complet.

*Démonstration.* Si  $\{\vec{h}_i\}$  est une suite de Cauchy, alors par la complétude de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{\vec{h}_i\}$  converge ponctuellement. Par définition de  $d_E$ , elle converge donc uniformément. Par un résultat d'analyse II, la limite est donc continue. Clairement, la condition  $|\vec{h}(\vec{x}, t)| \leq C|t - t_0|$  étant fermée, elle reste satisfaite par la limite. On en déduit que la limite est bien dans  $E$ . □

Considérons alors l'application  $A : E \rightarrow E$  définie par

$$(A\vec{h})(\vec{x}, t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(\vec{x} + \vec{h}(\vec{x}, \tau), \tau) d\tau.$$

L'application est bien définie. En effet, comme  $|\vec{h}(\vec{x}, t)| \leq C|t - t_0|$ ,  $\vec{x} + \vec{h}(\vec{x}, \tau) \in K_x \subset S$  qui est contenu dans le domaine de  $\vec{v}$ .

**Lemme 2.12.** *Si  $a' > 0$  est suffisamment petit, l'application  $A$  qui envoie  $E$  dans  $E$  est contractante.*

*Démonstration.* D'abord, la fonction  $A\vec{h}$  est continue, car l'intégrale d'une fonction continue dépendant continûment d'un paramètre dépend continûment de ce paramètre et de la borne supérieure d'intégration. De plus,

$$|A\vec{h}(\vec{x}, t)| \leq \left| \int_{t_0}^t \vec{v}(\vec{x} + \vec{h}(\vec{x}, \tau), \tau) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t C dt \right| \leq C|t - t_0| \text{ donc } A(E) \subset E.$$

Vérifions que  $A : E \rightarrow E$  est aussi une application contractante pour  $a' > 0$  suffisamment petit :

$$\begin{aligned} |(Ah_1 - Ah_2)(\vec{x}, t)| &= \left| \int_{t_0}^t (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) d\tau \right| \text{ avec } \vec{v}_i = (\vec{x} + \vec{h}_i(\vec{x}, \tau), \tau) \\ &\leq \int_{t_0}^t L \left| \vec{h}_1(\vec{x}, \tau) - \vec{h}_2(\vec{x}, \tau) \right| d\tau \\ &\leq Ld_E(\vec{h}_1, \vec{h}_2)|t - t_0| \\ &\leq La'd_E(\vec{h}_1, \vec{h}_2), \end{aligned}$$

où  $L = \sup_S |\vec{v}_*|$  et dans la deuxième ligne, l'inégalité est obtenue en appliquant le Théorème 2.10 à  $\vec{v}$  vue comme une fonction continûment différentiable en  $\vec{x}$ . En prenant  $a' > 0$  tel que  $La' < 1$ ,  $A$  sera donc une application contractante. □

**Théorème 2.13** (Existence et unicité). *Supposons que  $\vec{v}$  et  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  soient continues dans un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $(\vec{x}_0, t_0) \in \mathcal{U}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V} = S_{a', b'}$  de  $(\vec{x}_0, t_0)$  dans  $\mathcal{U}$  et une fonction continue  $\vec{h} : S_{a', b'} \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\varphi_{\vec{x}}(t) := \vec{x} + \vec{h}(\vec{x}, t)$  est l'unique solution du système d'EDO  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  avec  $\varphi_{\vec{x}}(t_0) = \vec{x}$ . En particulier, la solution  $\varphi_{\vec{x}}$  dépend continûment du point initial  $\vec{x}$ .*

*Démonstration.* Par le lemme, l'application  $A$  admet un unique point fixe  $\vec{h} \in E$ . C'est l'unique solution recherchée. □

## 2.2 Régularité des solutions

Si  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , le fibré tangent de  $\mathcal{U}$  est l'ensemble

$$T\mathcal{U} := \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n.$$

L'espace tangent en  $x$  est alors l'espace vectoriel  $T_x\mathcal{U} = x \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ . C'est la fibre du fibré tangent au-dessus de  $x$  :

$$T\mathcal{U} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathcal{U}, \quad T_x\mathcal{U} = \text{pr}_1^{-1}(x),$$

où  $\text{pr}_1$  est la projection sur le premier facteur. Si (19) est un système d'EDO défini sur  $\mathcal{U}$  avec  $\vec{v} : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, alors pourvu que  $\vec{v}$  soit continûment différentiable en  $\vec{x}$ , on peut lui associer un autre système d'EDO sur  $T\mathcal{U}$ , à savoir

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \\ \frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{v}_*(\vec{x}, t)\vec{y} \end{cases} \quad (20)$$

où  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\vec{x}, \vec{y}) \in T_x\mathcal{U} \subset T\mathcal{U}$  et  $\vec{v}_*(\vec{x}, t) : T_{\vec{x}}\mathcal{U} \rightarrow T_{\vec{x}}\mathcal{U}$  est la différentielle spatiale de  $\vec{v}$  en  $\vec{x}$  pour  $t$  fixé :

$$\vec{v}_*(\vec{x}, t)(\vec{h}) := \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_1}{\partial x_i} h_i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} h_i \right)$$

où  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in T_{\vec{x}}\mathcal{U}$  et  $\vec{v}(\vec{x}, t) = (v_1(\vec{x}, t), \dots, v_n(\vec{x}, t))$ .

Le système (20) est le système d'EDO aux variations pour (19). Outre le système (20), il sera commode de considérer le système d'EDO

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \\ \frac{dz}{dt} = \vec{v}_*(\vec{x}, t)z \end{cases} \quad (21)$$

obtenu de (20) en remplaçant  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  par  $z \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ , où  $\text{End}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Notation :** On dira qu'une fonction (e.g.  $\vec{v}$ ) est de classe  $C^k$  si elle est  $k$  fois continûment différentiable, i.e ses dérivées partielles existent et sont continues jusqu'à l'ordre  $k$ . On dira qu'elle est de classe  $C_x^k$  si ses dérivées partielles spatiales (en  $\vec{x}$ ) existent et sont continues jusqu'à l'ordre  $k$ .

**Théorème 2.14** (Théorème de différentiabilité). *Si  $\vec{v}$  est de classe  $C^2$  dans le système d'EDO (19), alors la solution locale  $\vec{g}(\vec{x}, t) = \varphi_{\vec{x}}(t)$  du Théorème 2.13 est de classe  $C^1$  (en  $\vec{x}$  et en  $t$ ).*

*Démonstration.* Comme  $\frac{d\vec{g}}{dt}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t)$  est continue, il suffit de montrer que  $\vec{g}$  est de classe  $C_x^1$ . Or, puisque  $\vec{v}$  est de classe  $C^2$ ,  $\vec{v}_*$  est de classe  $C^1$ . Ainsi, on peut appliquer le théorème d'existence et d'unicité au système (21). La preuve du théorème montre que la solution est donnée par une suite d'approximations picardiennes. En commençant avec l'approximation initiale  $\varphi_0 = \vec{x}$  (assez près du point  $\vec{x}_0$  qui nous intéresse) et  $\psi_0 = \text{Id} \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ , la suite d'approximation picardienne  $\varphi_k$  (pour  $\vec{x}$ ) et  $\psi_k$  pour  $z$  est donnée récursivement par :

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(\vec{x}, t) &= \vec{x} + \int_{t_0}^t \vec{v}(\varphi_k(\vec{x}, \tau), \tau) d\tau, \\ \psi_{k+1}(\vec{x}, t) &= \text{Id} + \int_{t_0}^t \vec{v}_*(\varphi_k(\vec{x}, \tau), \tau) \psi_k(\vec{x}, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Par notre choix de  $\psi_0$ ,  $(\varphi_0)_* = \psi_0$ . En procédant par récurrence sur  $k$ , on déduit plus généralement de (22) et la règle de la chaîne que  $(\varphi_k)_* = \psi_k$ . En d'autres termes,  $\{\psi_k\}$  est la suite des dérivées de  $\{\varphi_k\}$ . Or, par la preuve du théorème d'existence et d'unicité, la suite  $(\varphi_k, \psi_k)$  converge uniformément

(pour  $t$  assez petit) vers la solution du système (21) avec conditions initiales  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}$  et  $z(t_0) = \text{Id}$ . La convergence étant uniforme, on sait que la limite  $(\varphi_k, \psi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g, \psi)$  est continue et que  $g_* = \psi$ . En particulier,  $g$  est de classe  $C_x^1$ . □

Cet argument peut être itéré pour les dérivées en  $x$ . Fixons  $r \geq 2$ .

**Théorème 2.15** ( $T_r$ ). *Si  $\vec{v}$  est de classe  $C^r$ , alors la solution locale  $\vec{g}$  du Théorème 2.13 est de classe  $C_x^{r-1}$ .*

*Démonstration.* Si  $\vec{v}$  est de classe  $C^r$ , alors  $\vec{v}_*$  est de classe  $C^{r-1}$ . Le système (21) satisfait donc aux conditions du théorème  $T_{r-1}$ .

Pour  $r > 2$ , le théorème  $T_r$  découle donc du théorème  $T_{r-1}$  :

$$\begin{aligned} \vec{v} \text{ de classe } C^r &\Rightarrow \vec{v}_* \text{ est de classe } C^{r-1} \\ &\Rightarrow \vec{g}_* \text{ est de classe } C_x^{r-2} \text{ par le théorème } T_{r-1} \\ &\Rightarrow \vec{g} \text{ est de classe } C_x^{r-1}. \end{aligned}$$

Or, le théorème  $T_2$  est une conséquence immédiate du théorème précédent, d'où le résultat. □

**Corollaire 2.16** ( $T'_r$ ). *Si  $\vec{v}$  est de classe  $C^r$ , alors la solution locale  $\vec{g}$  du Théorème 2.13 est de classe  $C^{r-1}$ .*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que si  $f$  est de classe  $C_x^r$  et de classe  $C^{r-1}$ , alors

$$F(\vec{x}, t) = \int_{t_0}^t f(\vec{x}, \tau) d\tau$$

est de classe  $C^r$ . Ainsi, comme

$$\vec{g}(\vec{x}, t) = \vec{x} + \int_{t_0}^t \vec{v}(\vec{g}(\vec{x}, \tau), \tau) d\tau,$$

on voit que pour  $k \leq r$ ,

$$\vec{g} \text{ de classe } C^{k-1} \text{ et } C_x^k \Rightarrow \vec{g} \text{ est de classe } C^k.$$

Comme  $\vec{g}$  est de classe  $C^1$  par le théorème de différentiabilité et  $\vec{g}$  est de classe  $C_x^{r-1}$  par le théorème  $T_r$ , on voit en itérant cet argument que

$$\vec{g} \text{ est de classe } C^1 \Rightarrow \vec{g} \text{ est de classe } C^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{g} \text{ est de classe } C^{r-1}.$$

□

**Définition 2.17.** On dit que  $\vec{v}$  est de classe  $C^\infty$  si toutes ses dérivées partielles existent. On dit aussi que  $\vec{v}$  est lisse.

**Corollaire 2.18.** Si  $\vec{v}$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution locale  $\vec{g}$  du Théorème 2.13 est de classe  $C^\infty$  aussi.

**Remarque 2.19.** Si  $\vec{v}$  est analytique, il est aussi possible de montrer que  $\vec{g}$  est analytique.

**Remarque 2.20.** : Si  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  est de classe  $C^r$  avec  $r \geq 1$ , le théorème de différentiabilité montre que la famille de solutions du théorème d'existence et d'unicité est de classe  $C^{r-1}$ . En fait, avec un peu plus de travail, on peut montrer que la famille de solutions est de classe  $C^r$ , voir [Arn88, §32.6] pour tous les détails.

## 2.3 Redressement de champs de vecteurs

Dans cette section, nous allons montrer, lorsque le champ de vecteurs  $\vec{v}$  du système d'EDO (19) n'est pas nul, comment se ramener au cas où le champ de vecteurs  $\vec{v}$  est constant.

**Définition 2.21.** Un difféomorphisme entre deux ouverts  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{R}^n$  est une bijection  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  telle que  $f$  et  $f^{-1}$  sont des applications de classe  $C^1$ . On dit que la bijection  $f$  est un homéomorphisme si  $f$  et  $f^{-1}$  sont des applications continues. En particulier, tout difféomorphisme est un homéomorphisme.

**Théorème 2.22** (Théorème des fonctions inverses - Analyse III). Soit  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  une application de classe  $C^1$  entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Si la différentielle  $df_x : T_x\Omega_1 \rightarrow T_{f(x)}\Omega_2$  de  $f$  en  $x$  est un isomorphisme, alors il existe des voisinages ouverts  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  de  $x$  et  $f(x)$  dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  tels que  $f|_{\mathcal{U}_1} : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$  est un difféomorphisme.

**Remarque 2.23.** Inversement, si  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  est un difféomorphisme, alors pour tout  $x \in \mathcal{U}$ ,  $df_x : T_x\mathcal{U} \rightarrow T_{f(x)}\mathcal{V}$  est un isomorphisme. En effet, en différentiant les identités

$$f^{-1} \circ f = Id_{\mathcal{U}} \quad f \circ f^{-1} = Id_{\mathcal{V}},$$

il vient respectivement

$$d(f^{-1})_{f(x)} \circ df_x = Id_{T_x\mathcal{U}} \quad df_x \circ d(f^{-1})_{f(x)} = Id_{T_{f(x)}\mathcal{V}},$$

ce qui montre que  $df_x$  est inversible.

**Exemple 2.24.** Par l'exercice 6 de la § 2.6, les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  induisent un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \psi : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty[ \times \{0\}) \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

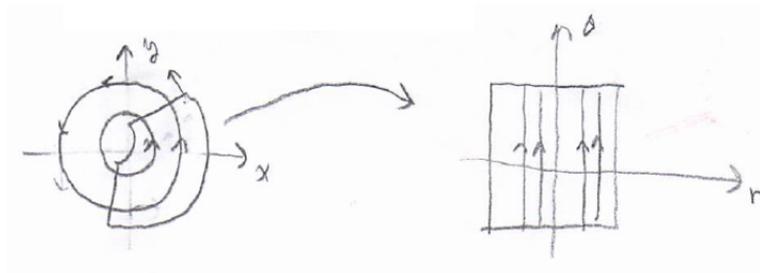
**Exemple 2.25.** Plus généralement, un changement de coordonnées peut être vu comme un difféomorphisme.

**Exemple 2.26.** En coordonnées polaires, le système

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

avec  $\vec{x} = (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  devient simplement

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = 1, \\ \frac{dr}{dt} = 0. \end{cases}$$



**Question 2.27.** Étant donné un système d'EDO  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ , peut-on trouver un changement de coordonnées dans l'espace des phases élargi de sorte que dans les nouvelles coordonnées  $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, t)$ , le système d'EDO devienne le système  $\frac{d\vec{y}}{dt} = 0$  ?

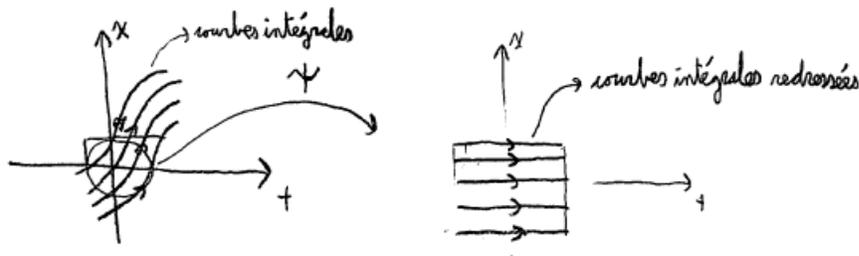
Le résultat qui suit est une réponse positive à cette question.

**Théorème 2.28** (Théorème de redressement - cas non-autonome). Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  un système d'EDO dans un ouvert  $\mathcal{U}$  de l'espace des phases élargi  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  avec  $\vec{v}$  de classe  $C^r$  pour un certain  $r \geq 2$ . Alors pour tout  $(\vec{x}_0, t_0) \in \mathcal{U}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(\vec{x}_0, t_0) \in \mathcal{U}$  et un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathcal{V} &\longrightarrow S_{a,b} \\ (\vec{x}, t) &\longmapsto (f(\vec{x}, t), t) \end{aligned}$$

tel que  $d\psi_{(\vec{x}, t)}(\vec{v}(\vec{x}, t), 1) = (0, 1)$  pour tout  $(\vec{x}, t) \in \mathcal{V}$ , où

$$S_{a,b} = \{(\vec{y}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |t - t_0| < a, |\vec{y} - \vec{x}_0| < b\}.$$



*Démonstration.* Par le théorème d'existence et d'unicité ainsi que le théorème de régularité, il existe une famille de solutions  $\vec{g}(\vec{x}, t)$  de classe  $C^{r-1}$  définie dans un voisinage de  $(\vec{x}_0, t_0)$ . Considérons alors

l'application

$$\phi(\vec{x}, t) = (\vec{g}(\vec{x}, t), t)$$

Remarquons que :

- 1)  $\phi$  est une application différentiable de classe  $C^{r-1}$  puisque  $\vec{g}$  l'est ;
- 2)  $d\phi_{(\vec{x}, t)}((0, 1)) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{x}, t) = (\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}(\vec{x}, t), 1) = (\vec{v}(\vec{x}, t), 1)$ , car  $\vec{g}$  est une famille de solutions.

Si on peut montrer que  $\phi$  est un difféomorphisme pour  $a > 0$  et  $b > 0$  assez petits, on pourra donc prendre  $\psi = \phi^{-1}$ . Par le théorème des fonctions inverses, il suffit donc de montrer que  $d\phi_{(\vec{x}_0, t_0)}$  est inversible. Or, comme  $\vec{g}(\vec{x}, t_0) = \vec{x}$ ,  $d\phi_{(\vec{x}_0, t_0)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , vu comme une matrice  $(n+1) \times (n+1)$ , est de la forme :

$$d\phi_{(\vec{x}_0, t_0)} = \left[ \begin{array}{c|c} \text{Id} & 0 \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial t} \dots \frac{\partial g_n}{\partial t} & 1 \end{array} \right] \text{ où } \vec{g} = (g_1, \dots, g_n).$$

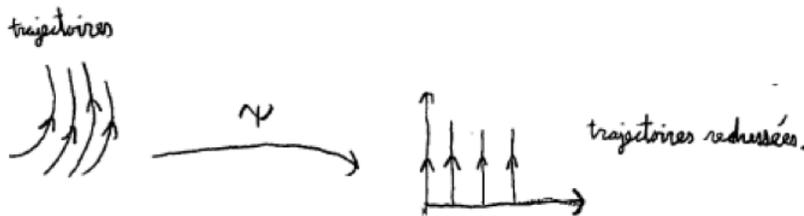
Le déterminant de cette matrice étant clairement 1,  $d\phi_{(\vec{x}_0, t_0)}$  est bien inversible. □

**Définition 2.29.** Un système d'EDO est autonome s'il est de la forme  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  avec  $\vec{v}$  un champ de vecteurs ne dépendant pas du temps.

**Théorème 2.30** (Théorème du redressement - cas autonome). Soit  $\vec{v}$  un champ de vecteurs de classe  $C^r$  pour  $r \geq 2$  défini sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0$  en un certain  $\vec{x}_0 \in \mathcal{U}$ , alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\vec{x}_0$  dans  $\mathcal{U}$  et un difféomorphisme  $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$  tel que

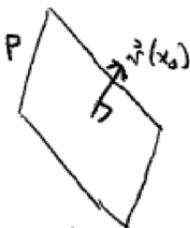
$$d\psi_{\vec{x}}(\vec{v}(\vec{x})) = e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

est un vecteur constant,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  étant la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .



*Démonstration.* Considérons le système d'EDO autonome  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  et prenons comme temps initial  $t_0 = 0$ . Par le théorème d'existence et d'unicité, on a une famille de solutions  $\vec{g}(\vec{x}, t)$  de classe  $C^{r-1}$  définie dans un voisinage cylindrique  $S_{a,b}$  de  $(\vec{x}_0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Puisque  $\vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0$ , l'hyperplan  $P \subset \mathbb{R}^n$  passant par  $\vec{x}_0$  et perpendiculaire à  $\vec{v}(\vec{x}_0)$  est très bien défini :

$$P = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\vec{y} - \vec{x}_0) \cdot \vec{v}(\vec{x}_0) = 0\}.$$



Clairement,  $P \cong \mathbb{R}^{n-1}$ . Soit  $\phi$  la restriction de  $\vec{g}$  à  $\mathcal{W} := (P \times \mathbb{R}) \cap S_{a,b} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , de sorte que :

1)  $\phi$  est une application différentiable de classe  $C^{r-1}$ , puisque  $\vec{g}$  l'est ;

2) Pour  $(\vec{x}, t) \in \mathcal{W}$  et  $(0, 1) \in T_{(\vec{x}, t)}\mathcal{W}$ ,  $d\phi_{(\vec{x}, t)}(0, 1) = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \vec{v}$ , puisque  $\vec{g}$  est une famille de solutions, plus précisément,

$$d\phi_{(\vec{x}, t)}(0, 1) = \vec{v}(\phi(\vec{x}, t)) = \vec{v}(\vec{g}(\vec{x}, t)).$$

Si on peut montrer que  $\phi$  est un difféomorphisme pour  $a > 0$  et  $b > 0$  assez petits, il suffira de prendre  $\psi = \phi^{-1}$ . Or, par le théorème des fonctions inverses, ce sera le cas pourvu que

$$d\phi_{(\vec{x}_0, 0)} : P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est un isomorphisme. Or, en termes d'une base orthonormale  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}\}$  est une base de  $P$ , on voit que  $d\phi_{(\vec{x}_0, 0)}$  correspond à la matrice

$$d\phi_{(\vec{x}_0, 0)} = \left[ \begin{array}{c|c} \text{Id}_P & 0 \\ \hline 0 & |\vec{v}(x_0)| \end{array} \right]$$

en supposant que  $\vec{v}(x_0) = |\vec{v}(x_0)|v_n$  sans perte de généralité. En effet, cela découle du fait que  $\vec{g}(\vec{x}, 0) = \vec{x}$  et  $\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \vec{v}(\vec{x})$ . En particulier, cette matrice est inversible, puisque  $|\vec{v}(x_0)| \neq 0$ , d'où le résultat.  $\square$

**Définition 2.31.** Pour un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ , un point singulier d'un champ de vecteurs  $\vec{v} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un point  $\vec{x}_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $\vec{v}(\vec{x}_0) = 0$ .

**Remarque 2.32.** En un point singulier, un champ de vecteurs peut être différentiable ou lisse. Le point est singulier au sens où les directions du champ de vecteurs y varient généralement de façon discontinue.

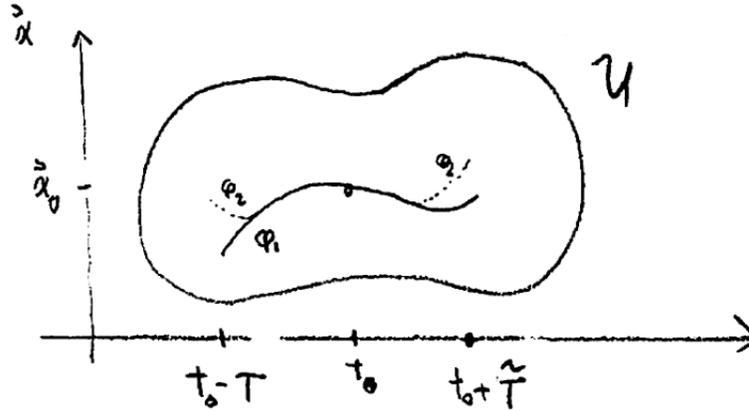
Dans ces termes, le théorème de redressement affirme que dans un voisinage assez petit d'un point non-singulier (i.e.  $\vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0$ ), un champ de vecteurs peut être redressé, i.e. envoyé sur un champ de vecteurs constant par difféomorphisme (autrement dit, un changement de coordonnées).

## 2.4 Prolongement des solutions

Dans le théorème d'unicité, on a pour l'instant obtenu un résultat d'unicité local : au moins pour un court laps de temps, il n'y a au plus qu'une solution.

**Question 2.33.** *Est-ce que l'unicité de la solution est possible pour des lapses de temps plus longs ?*

**Théorème 2.34** (Théorème d'unicité global). *Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  un système d'EDO sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de l'espace des phases élargi  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux solutions définies sur un intervalle de temps  $[t_0 - T, t_0 + \tilde{T}]$  pour  $T > 0$  et  $\tilde{T} > 0$  avec courbes intégrales contenues dans  $\mathcal{U}$  telles que  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = \vec{x}_0$  pour un certain  $(\vec{x}_0, t_0)$ . Alors forcément,  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  pour tout  $t$ .*



(Les solutions ne peuvent se séparer, même après un laps de temps important).

*Démonstration.* Par le théorème d'unicité local, on sait au moins qu'il existe  $a > 0$  avec  $a \leq \min \{T, \tilde{T}\}$  tel que  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  pour  $t \in ]t_0 - a, t_0 + a[$ . Soit  $0 < \tau \leq \tilde{T}$  le laps de temps maximal pour lequel  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$  :

$$\tau = \sup \{ \tau' > 0 \mid \varphi_1(t) = \varphi_2(t) \forall t \in [t_0, t_0 + \tau'] \}$$

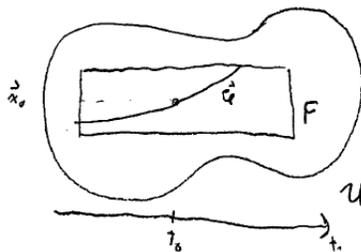
Par définition,  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_0 + \tau[$ , donc par continuité de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , on a aussi que  $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$ . Or, si  $\tau < \tilde{T}$ , par le théorème d'unicité locale, il existerait  $\delta > 0$  tel que  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  pour  $t \in ]\tau - \delta, \tau + \delta[$ , contredisant la maximalité de  $\tau$ . Il faut donc que  $\tau = \tilde{T}$  et que  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_0 + \tilde{T}]$ . Similairement, on montre que  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  pour tout  $t \in [t_0 - T, t_0]$ , d'où le résultat. □

**Corollaire 2.35.** *Pourvu que  $\vec{v} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\vec{v}_*$  soient continues, le prolongement d'une solution est unique lorsqu'il existe.*

**Définition 2.36.** *Si une solution  $\phi(t)$  du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  existe pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on dit que cette solution peut être prolongée indéfiniment. Si la solution existe pour tout  $t \geq t_0$  (respectivement pour tout  $t \leq t_0$ ), on dit que la solution se prolonge indéfiniment en avant (respectivement en arrière).*

**Définition 2.37.** Soit  $\Gamma$  un sous-ensemble de  $\mathcal{U}$ . Si  $\varphi$  est une solution du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  telle que  $\varphi(t_0) = \vec{x}_0$  et définie sur  $[t_0, t_0 + \tilde{T}]$  avec  $\varphi(t_0 + \tilde{T}) \in \Gamma$ , on dit que  $\varphi$  est prolongeable en avant jusqu'à  $\Gamma$ . On définit similairement un prolongement en arrière jusqu'à  $\Gamma$ .

**Théorème 2.38** (Théorème de prolongement). Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  un système avec  $\vec{v} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\vec{v}_*$  continues. Soit  $F$  un ouvert borné dont la fermeture  $\bar{F}$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  est contenue dans  $\mathcal{U}$ . En particulier,  $\bar{F}$  est compact (borné et fermé). Alors pour  $(\vec{x}_0, t_0) \in F$ , la solution  $\varphi$  telle que  $\varphi(t_0) = \vec{x}_0$  est prolongeable en avant et en arrière jusqu'à la frontière  $\partial F = \bar{F} \setminus F$  de  $F$ .



*Démonstration.* Si  $\varphi$  peut être prolongée indéfiniment en avant, alors sa courbe intégrale n'est pas bornée. Elle ne peut donc pas être entièrement contenue dans  $\bar{F}$ . Elle doit donc passer par la frontière  $\partial F$  à un certain temps  $\tau > t_0$  pour sortir de  $F$ . En effet, l'ensemble

$$E = \{t \geq t_0 \mid \varphi(t) \in \bar{F}\} \subset [t_0, \infty[$$

est fermé, puisque  $\varphi$  est continue. De plus,  $E$  est borné, puisque  $\varphi(t) \notin \bar{F}$  pour  $t$  assez grand. Il suffit donc de prendre  $\tau = \sup E$ . Puisque  $E$  est fermé,  $\tau \in E$ , donc  $\varphi(\tau) \in \bar{F}$ . D'autre part,  $\varphi(\tau) \in \partial F$ , car autrement  $\tau$  ne serait pas le supremum de  $E$  par continuité de  $\varphi$ .

Si la solution ne peut être prolongée indéfiniment, alors chaque point  $(\vec{x}, t) \in \bar{F}$  est contenu dans un ouvert  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  tel que pour tout  $(\vec{y}, \tau) \in \bar{\mathcal{V}}$ , les solutions passant par  $(\vec{y}, \tau)$  existent pour  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon_{\mathcal{V}}]$  pour un  $\varepsilon_{\mathcal{V}} > 0$  ne dépendant que de  $(\vec{x}, t)$ . Comme  $\bar{F}$  est compact, on peut recouvrir  $\bar{F}$  par un nombre fini de tels ouverts

$$\bar{F} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_i$$

En prenant

$$\varepsilon = \min_{i=1, \dots, n} \varepsilon_{\mathcal{V}_i} > 0,$$

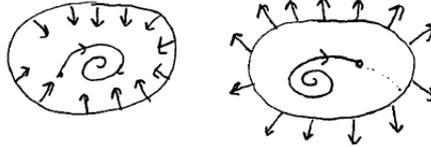
on voit que tant que  $\varphi$  est dans  $\bar{F}$ , elle peut être prolongée en avant de  $\varepsilon$ . Puisqu'elle n'est pas indéfiniment prolongeable en avant, il faut donc qu'elle sorte de  $F$  pour  $t$  assez grand, donc passe par  $\partial F$  pour un certain  $\tau > t_0$ . La solution est donc à nouveau prolongeable en avant jusqu'à  $\partial F$ . Similairement, la solution est prolongeable en arrière jusqu'à  $\partial F$ . □

Dans le cas autonome, on peut aussi obtenir la variante suivante.

**Théorème 2.39** (Théorème de prolongement - cas autonome). Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  un système autonome pour  $\vec{v} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue définie sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $F$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont la fermeture est contenue dans  $\mathcal{U}$ . Alors une solution  $\varphi$  du système telle que  $\varphi(t_0) \in F$  pour un certain  $t_0 \in \mathbb{R}$  peut être prolongée en avant (ou en arrière) soit indéfiniment, soit jusqu'à la frontière de  $F$  (autrement dit la frontière de  $F \times \mathbb{R}$  dans l'espace des phases élargi).

*Démonstration.* Comme  $\bar{F}$  est compact, par le théorème d'existence et d'unicité, il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts  $\mathcal{V}_i$  tel que pour tout  $\vec{x} \in \mathcal{V}_i$ , la solution  $g(\vec{x}, t)$  du système tel que  $g(\vec{x}, 0) = \vec{x}$  existe pour tout  $t \in ]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[$  pour un certain  $\varepsilon_i > 0$ . En prenant  $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$ , on voit donc que tant que la trajectoire de  $\varphi$  est dans  $\bar{F}$ , elle peut être prolongée de  $\varepsilon$  en avant ou en arrière. Ainsi, si elle n'est pas prolongeable indéfiniment en avant (ou en arrière), elle doit donc sortir de  $\bar{F}$  après un certain temps. En particulier, elle passe par  $\partial F$ , c'est-à-dire qu'elle est prolongeable jusqu'à  $\partial F$  en avant (ou en arrière). □

**Corollaire 2.40.** Si sur  $\partial F$  (qu'on suppose de classe  $C^1$ , i.e. localement de la forme  $f^{-1}(0)$  pour  $f$  une fonction de classe  $C^1$ ),  $\vec{v}$  pointe vers l'intérieur de  $F$ , alors la solution  $\varphi$  reste dans  $F$  et peut être prolongée vers l'avant indéfiniment. Similairement, si sur  $\partial F$ ,  $\vec{v}$  pointe vers l'extérieur de  $F$ , alors la solution  $\varphi$  peut être prolongée indéfiniment vers l'arrière.



**Corollaire 2.41.** Si  $\partial F$  est de classe  $C^1$  et si  $\vec{v}$  est tangent à  $\partial F$ , alors la solution  $\varphi$  reste dans  $F$  peut être prolongée indéfiniment.

## 2.5 Le flot d'un champ de vecteurs

Soit  $\vec{v}$  un champ de vecteurs de classe  $C^r$  avec  $r \geq 1$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.42.** Un flot local du champ de vecteurs  $\vec{v}$  sur un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$  est une application différentiable de classe  $C^r$

$$\phi : \mathcal{V} \times ]-\delta, \delta[ \rightarrow \mathcal{U} \quad \text{pour un certain } \delta > 0$$

telle que  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{x}, t) = \vec{v}(\phi(\vec{x}, t))$  et  $\phi(\vec{x}, 0) = \vec{x}$ . On utilise aussi la notation  $\phi_t(\vec{x}) = \phi(\vec{x}, t)$ .

**Exemple 2.43.** : Par le théorème d'existence et de régularité, un flot local existe pour  $\mathcal{V}$  assez petit et  $\delta > 0$  assez petit. Il suffit de prendre  $\phi(\vec{x}, t) = \vec{g}(\vec{x}, t)$  avec  $\vec{g}(\vec{x}, t)$  la famille de solutions locales.

**Proposition 2.44.** Si  $\phi : \mathcal{V} \times ]-\delta, \delta[ \rightarrow \mathcal{U}$  est un flot local pour  $\vec{v}$ , alors  $\phi_t : \mathcal{V} \rightarrow \phi_t(\mathcal{V})$  est un difféomorphisme sur son image pour tout  $t \in ]-\delta, \delta[$ .

*Démonstration.* Par définition,  $\phi_t : \mathcal{V} \rightarrow \phi_t(\mathcal{V})$  est une application surjective. Par le théorème d'unicité global, c'est aussi une application injective. L'application  $\phi_t$  est donc une bijection. Comme elle est de classe  $C^r$ , pour vérifier que son inverse est aussi de classe  $C^r$ , il suffit d'appliquer le théorème des fonctions inverses en vérifiant que la différentielle de  $\phi_t$  est partout inversible. Or, par le système des variations associé au champ de vecteurs  $\vec{v}$ ,

$$\frac{d}{dt}(d\phi_t)_{\vec{x}} = \vec{v}_*(d\phi_t)_{\vec{x}}.$$

Comme  $d\phi_0 = \text{Id}$  et que  $t \mapsto d\phi_t$  est continue,  $(d\phi_t)_{\vec{x}}$  est inversible pour  $t$  assez près de zéro, en quel cas :

$$\frac{d}{dt}(d\phi_t)_{\vec{x}} = \vec{v}_*(d\phi_t)_{\vec{x}} \implies \left( \frac{d}{dt}(d\phi_t)_{\vec{x}} \right) (d\phi_t)_{\vec{x}}^{-1} = \vec{v}_*(\phi_t(\vec{x}), t).$$

En prenant la trace de part et d'autre, on obtient (en prenant la base canonique)

$$\frac{d}{dt} \log(\det((d\phi_t)_{\vec{x}})) = \text{Tr} \left( \left( \frac{d}{dt}(d\phi_t)_{\vec{x}} \right) (d\phi_t)_{\vec{x}}^{-1} \right) = \text{Tr}(\vec{v}_*(\phi_t(\vec{x}), t))$$

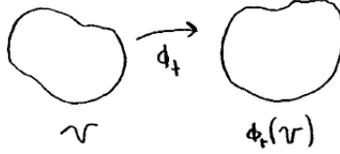
$$\implies \log(\det((d\phi_t)_{\vec{x}})) = \int_0^t \text{Tr}(\vec{v}_*(\phi_\tau(\vec{x}), \tau) d\tau), \text{ car } \log(\det((d\phi_0)_{\vec{x}})) = \log(\det(\text{Id})) = \log(1) = 0$$

$$\implies \det(d\phi_t)_{\vec{x}} = \exp \left( \int_0^t \text{Tr}(\vec{v}_*(\phi_\tau(\vec{x}), \tau) d\tau \right) \neq 0 \quad \forall t \in ]-\delta, \delta[$$

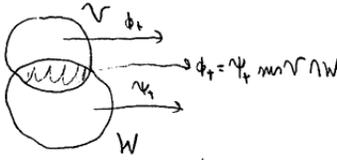
$$\implies (d\phi_t)_{\vec{x}} \text{ est bien inversible } \forall t \in ]-\delta, \delta[, \vec{x} \in \mathcal{V}.$$

□

Un flot local est donc une famille de difféomorphismes.



Si  $\phi_t$  et  $\psi_t$  sont deux flots locaux de  $\vec{v}$  définis sur  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$ , alors par unicité des solutions, sur  $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ , on a que  $\phi_t = \psi_t$ .



On peut donc utiliser  $\phi_t$  pour dénoter tous les flots locaux de  $\vec{v}$  sans ambiguïté.

**Lemme 2.45.** Si  $\phi_{t+s}(\vec{x})$  et  $\phi_t \circ \phi_s(\vec{x})$  sont définis pour  $\vec{x}$  et  $s$  fixés et  $t \in ]-\delta, \delta[$ , alors  $\phi_{t+s}(\vec{x}) = \phi_t \circ \phi_s(\vec{x})$  pour tout  $t \in ]-\delta, \delta[$ .

*Démonstration.* On a  $\frac{d}{dt}\phi_{t+s}(\vec{x}) = \vec{v}(\phi_{t+s}(\vec{x}))$  et  $\frac{d}{dt}\phi_t(\phi_s(\vec{x})) = \vec{v}(\phi_t(\phi_s(\vec{x})))$ . Ce sont donc des solutions du système associé à  $\vec{v}$ . Comme  $\phi_{0+s}(\vec{x}) = \phi_s(\vec{x}) = \phi_0 \circ \phi_s(\vec{x})$ , ces solutions satisfont à la même condition initiale en  $t = 0$ . Par le théorème d'unicité, il faut donc que  $\phi_{t+s}(\vec{x}) = \phi_t \circ \phi_s(\vec{x})$  pour tout  $t \in ]-\delta, \delta[$ .  $\square$

**Théorème 2.46.** Si  $\vec{v}$  est à support compact, c'est-à-dire que  $\vec{v} \equiv 0$  en dehors d'un ensemble borné et fermé, alors le flot de  $\vec{v}$  existe globalement et pour tout  $t$ ,

$$\phi : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}.$$

De plus,  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

*Démonstration.* Soit  $F \subset \mathcal{U}$  un sous-ensemble borné et fermé en dehors duquel  $\vec{v} \equiv 0$ . Alors sur  $\mathcal{U} \setminus F$ , le flot est trivialement donné par

$$\begin{aligned} \phi & : \mathcal{U} \setminus F \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \setminus F \\ (\vec{x}, t) & \mapsto \vec{x}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque  $\vec{x}_i \in F$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}_i$  de  $\vec{x}_i$  et  $\delta_i > 0$  tel que le flot  $\phi : \mathcal{V}_i \times ]-\delta_i, \delta_i[ \rightarrow \mathcal{U}$  est défini sur  $\mathcal{V}_i \times ]-\delta_i, \delta_i[$ . Comme  $F$  est compact, on peut recouvrir  $F$  par un nombre fini de tels ouverts, disons

$$F \subset \bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}_i.$$

En prenant  $\delta = \min \{\delta_i \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$ , le flot sera globalement défini sur  $\mathcal{U}$  pour  $t \in ]-\delta, \delta[$  :

$$\phi : \mathcal{U} \times ]-\delta, \delta[ \rightarrow \mathcal{U}.$$

On peut alors prolonger le flot à  $] - 2\delta, 2\delta[$  en prenant  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$  pour  $t, s \in ] - \delta, \delta[$ . En itérant cette construction, on peut donc prolonger  $\phi_t$  indéfiniment. Par le lemme, on a bien que  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

□

**Remarque 2.47.** *Le flot du théorème précédant induit un homomorphisme*

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{U}) \\ t &\mapsto \phi_t \end{aligned}$$

entre  $(\mathbb{R}, +)$  et le groupe  $\text{Diff}(\mathcal{U})$  des difféomorphismes de  $\mathcal{U}$ .

**Théorème 2.48.** *Si  $F$  est un ouvert borné avec  $\bar{F} \subset U$ , si  $\partial F$  est de classe  $C^1$  et  $\vec{v}$  est tangent à  $\partial F$ , alors sur  $F$ , le flot de  $\vec{v}$  existe pour tout temps. De plus  $\phi_t : F \rightarrow F$  est un difféomorphisme  $\forall t$  et  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s \forall t, s \in \mathbb{R}$*

*Démonstration.* En utilisant la compacité de  $\bar{F}$ , on peut trouver un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$  contenant  $\bar{F}$  et  $\delta > 0$  tel que le flot de  $\vec{v}$  est défini sur  $\mathcal{V}$  pour  $t \in ] - \delta, \delta[$  :

$$\phi : \mathcal{V} \times ] - \delta, \delta[ \rightarrow \mathcal{U}.$$

Par le Corollaire 2.41,  $\phi_t(F) \subset F \forall t \in ] - \delta, \delta[$ . En itérant  $\phi_t$ , on peut donc définir  $\phi$  sur  $F$  pour tout  $t$  :

$$\phi : F \times \mathbb{R} \rightarrow F.$$

Par le Lemme 2.45,  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$  sur  $F$ , donc  $\phi_t : F \rightarrow F$  est un difféomorphisme avec inverse  $\phi_{-t}$ .

□

## 2.6 Exercices

1. Montrer qu'une application lipschitzienne entre deux espaces métriques est automatiquement continue.
2. Déterminer si les fonctions suivantes sont lipschitziennes sur leur domaine de définition :
  - (a)  $f(x) = |x|$  pour  $x \in \mathbb{R}$  ;
  - (b)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  pour  $x \in [-1, 1]$  ;
  - (c)  $f(x) = \frac{1}{x}$  pour  $x \in [1, \infty)$  ;
  - (d)  $f(x, y) = (x + 2y, -y)$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ;
  - (e)  $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$  pour  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
3. Soient  $K$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  et

$$E := \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}$$

l'ensemble des fonctions continues sur  $K$ . Montrer que l'application

$$d(f_1, f_2) = \max_{x \in K} |f_1(x) - f_2(x)|$$

induit une structure d'espace métrique sur  $E$ .

4. Si, pour  $r \geq 1$ ,  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  est une application de classe  $C^r$  qui est un difféomorphisme, utiliser la relation

$$d(f^{-1})_y = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}$$

pour conclure que  $f^{-1}$  est aussi de classe  $C^r$ .

5. . Montrer que l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x) = x^3$  est un homéomorphisme, mais pas un difféomorphisme.
6. Montrer que les coordonnées polaires induisent un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \psi : ]0, \infty[ \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty[ \times \{0\}) \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

7. On considère l'équation  $\frac{dx}{dt} = x^2$ .

- (a) Sauf pour la solution triviale  $x = 0$ , montrer que les solutions de l'équation ne peuvent pas être prolongées indéfiniment.
- (b) Esquisser quelques courbes intégrales de solutions de l'équation dans l'espace des phases élargi.

8. Soit  $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^r$  telle que  $dH_{\vec{x}}(\vec{v}(\vec{x})) = 0$  pour tout  $\vec{x} \in \mathcal{U}$ .

- (a) Pour toute solution  $\vec{x}(t)$  du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$ , montrer que  $t \mapsto H(\vec{x}(t))$  est une fonction constante.
- (b) Si  $F_c := H^{-1}((-\infty, c))$  est tel que  $\overline{F_c} = H^{-1}((-\infty, c])$  est compact pour un certain  $c \in \mathbb{R}$  et que la différentielle  $dH$  ne s'annule nulle part sur  $\partial F_c = H^{-1}(c)$ , montrer que le flot de  $\vec{v}$  existe sur  $F_c \times \mathbb{R}$  :

$$\phi : F_c \times \mathbb{R} \rightarrow F_c.$$

- (c) Avec les mêmes hypothèses, montrer que le flot est bien défini sur  $\partial F_c$  pour tout temps :

$$\phi : \partial F_c \times \mathbb{R} \rightarrow F_c.$$

9. Soit  $F$  est un ouvert borné tel que sa fermeture  $\overline{F}$  est incluse dans  $\mathcal{U}$  et sa frontière  $\partial F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- (a) Si sur  $\partial F$ , le champ de vecteurs  $\vec{v}$  pointe vers l'intérieur de  $F$ , montrer que le flot  $\phi_t : F \rightarrow F$  existe pour tout  $t \geq 0$ .
- (b) Si sur  $\partial F$ , le champ de vecteurs  $\vec{v}$  pointe plutôt vers l'extérieur de  $F$ , montrer que le flot  $\phi_t : F \rightarrow F$  existe pour tout  $t \leq 0$ .
- (c) Dans les deux cas, est-ce que  $\phi_t : F \rightarrow F$  est un difféomorphisme pour  $t \neq 0$  (lorsque défini) ?

10. Si  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$  et  $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbb{A}\vec{x}$  pour une certaine matrice  $\mathbb{A}$  à coefficients constants, montrer que le flot de  $\vec{v}$  est donné par

$$\phi_t(\vec{x}) = \exp(t\mathbb{A})\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}.$$

11. Si  $\vec{v}(\vec{x}) = |\vec{x}|\vec{x}$  pour  $\vec{x} \neq 0$ , alors montrer que le flot de  $\vec{v}$  est donné par

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{\vec{x}}{1 - |\vec{x}|t} \quad \text{pour } t < \frac{1}{|\vec{x}|}.$$

En particulier, le temps d'existence du flot dépend de  $\vec{x}$  et ne peut être choisi de façon uniforme sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Indice : Utiliser les coordonnées sphériques.

12. Montrer que l'équation  $\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 1, & x(t) < 0, \\ -1, & x(t) \geq 0 \end{cases}$  ne possède pas de solution telle que  $x(0) = 0$ .

13. Pour des choix judicieux de  $\delta > 0$  et  $M > 0$ , l'application de Picard  $Ax(t) := \int_0^t 3x^{\frac{2}{3}}(\tau)d\tau$  peut-elle être une application contractante sur l'espace métrique

$$E := \{x : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ est continue et } \sup_{t \in (-\delta, \delta)} |x(t)| \leq M\}$$

muni de la métrique

$$d(x, y) := \sup_{-\delta < t < \delta} |x(t) - y(t)|?$$

14. Combien de solutions différentes telles que  $x(0) = 0$  l'équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{3}}$  possède-t-elle?

### 3 Stabilité d'une solution



On a vu dans le chapitre précédent qu'un point singulier d'un champ de vecteurs  $\vec{v} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un point  $\vec{x}_0 \in \mathcal{U}$  où le champ de vecteurs s'annule :  $\vec{v}(\vec{x}_0) = 0$ . Il donne lieu à une solution stationnaire  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$  pour tout  $t$  du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$ , aussi dite position d'équilibre. Près d'un point singulier, le théorème de redressement (Théorème 2.30) ne s'applique pas et le flot du champ de vecteurs peut avoir plusieurs comportements possibles. Le but de ce chapitre sera précisément d'étudier et de classifier les comportements possibles en fonction du champ de vecteurs.

#### 3.1 Stabilité d'un point singulier

Dans ce qui suit, on effectuera une translation (des coordonnées) au besoin pour se ramener au cas où le point singulier est en  $\vec{x} = 0$ .

**Définition 3.1.** Soit  $\vec{v} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  ayant un point singulier en  $\vec{x} = 0$ . La position d'équilibre correspondante est dite stable si  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  (dépendant de  $\varepsilon > 0$ ) tel que pour tout  $\vec{x}_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $\|\vec{x}_0\| = d(\vec{x}_0, 0) < \delta$ , l'unique solution  $\varphi$  telle que  $\varphi(0) = \vec{x}_0$  se prolonge indéfiniment vers l'avant de sorte que  $\|\varphi(t)\| < \varepsilon \forall t > 0$ . Autrement, on dit que la position d'équilibre est instable.

**Exemple 3.2.** *Considérons le système*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (23)$$

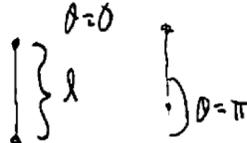
d'ordre 1 associé à l'équation du mouvement du pendule de longueur  $\ell$



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0.$$

Les points singuliers du champ de vecteurs correspondant sont donnés par  $\begin{pmatrix} \pi k \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}$ . Comme le système est périodique de période  $2\pi$  par rapport à  $\theta$ , on a véritablement seulement deux points

d'équilibre  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$  :



Comme on suppose qu'il n'y a pas de friction, le système est conservatif, c'est-à-dire que l'énergie totale est conservée :

$$H = T + U = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) = \frac{m\ell^2}{2} y^2 - mgl \cos(\theta)$$

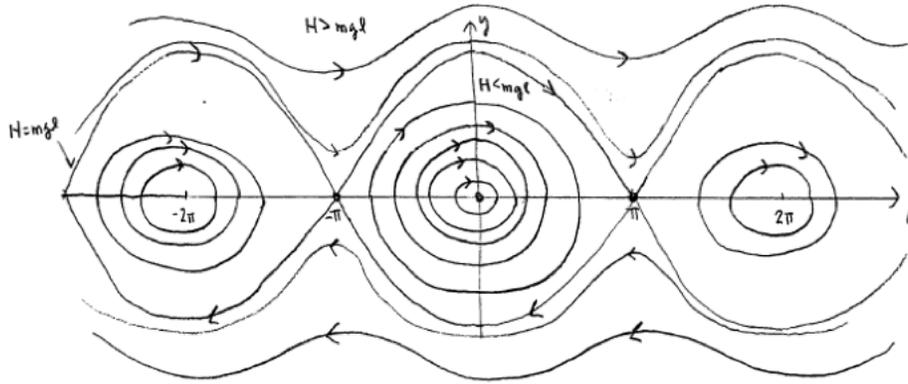
où  $T$  est l'énergie cinétique,  $U$  est l'énergie potentielle et  $\dot{\theta}$  dénote la dérivée de  $\theta$  par rapport au temps  $t$ . En effet, si

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

est une solution du système, alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\theta(t), y(t)) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m\ell^2}{2} y(t)^2 - mgl \cos \theta(t) \right) = m\ell^2 y(t) \frac{dy}{dt} + mgl \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \\ &= m\ell^2 y(t) \left( \frac{-g}{\ell} \sin(\theta) + mgl \sin \theta(y) \right) \text{ par (23), puisque } \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} \text{ est une solution,} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans l'espace des phases, les trajectoires des solutions sont donc le long des courbes de niveau de l'énergie totale  $H(\theta, y)$ , ce qui donne le diagramme suivant :



Le point  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est alors stable. En effet, pour  $\varepsilon > 0$ , il suffit de prendre  $\delta > 0$  tel que

$$\|\vec{x}\| < \delta \implies H(\vec{x}) < \min \{ \min \{ H(\vec{w}) \mid \|\vec{w}\| = \varepsilon \}, mgl \},$$

ce qui est possible puisque  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

Par contre, le point  $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$  est instable. Peu importe le voisinage que l'on choisira, il y aura des trajectoires correspondant à des niveaux d'énergie  $H > mgl$ . Par périodicité,  $\begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$  est stable pour  $k \in \mathbb{Z}$  pair et instable pour  $k \in \mathbb{Z}$  impair.

**Définition 3.3.** On dit que la position d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est asymptotiquement stable si elle est stable et si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$$

pour  $\varphi$  une solution telle que  $\varphi(0) = \vec{x}_0$  pour  $\vec{x}_0$  dans un voisinage suffisamment petit de 0.

**Exemple 3.4.** Bien que stable, la position d'équilibre  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  du système précédent n'est pas asymptotiquement stable. En effet, si on avait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0,$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(\varphi(t)) = H(0) = -mgl,$$

ce qui n'est possible que pour  $\varphi(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  par conservation de l'énergie.

Cependant, si on ajoute de la friction à l'équation du mouvement du pendule, disons

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0,$$

alors le système d'ordre 1 correspondant devient

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\gamma y - \frac{g}{\ell} \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (24)$$

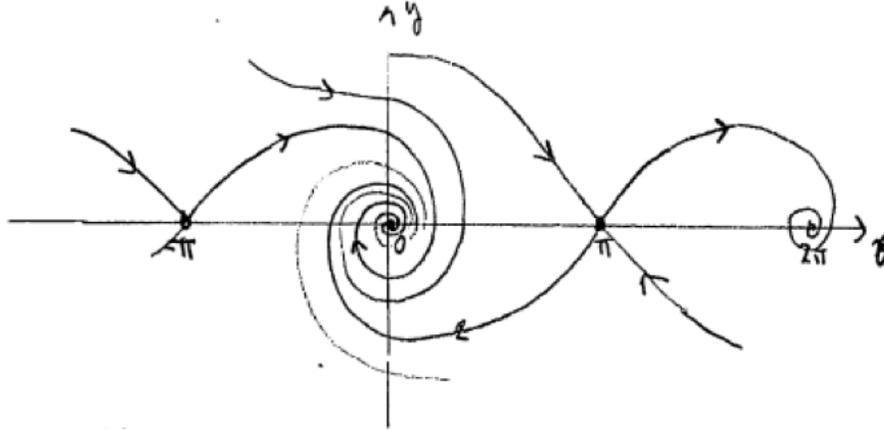
À nouveau, les points singuliers sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Toutefois, le système n'est pas conservatif, la force de friction dissipant peu à peu l'énergie. En effet, le long d'une solution :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\theta(t), y(t)) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m\ell^2}{2} y^2 - mgl \cos \theta \right) = m\ell^2 y \frac{dy}{dt} + mgl \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \\ &= m\ell^2 y \left( -\gamma y - \frac{g}{\ell} \sin \theta \right) + mgl \sin \theta (y), \text{ par (24), puisqu'on a une solution,} \\ &= -m\ell^2 \gamma y^2 \leq 0. \end{aligned}$$

De plus,  $\frac{d}{dt} H = -m\ell^2 \gamma y^2 < 0$  dès que  $y \neq 0$ . Si la force de friction est faible, on sera dans le régime amorti périodique :



La position d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est alors asymptotiquement stable. On le démontrera de manière rigoureuse plus tard. Le point d'équilibre  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$  lui reste instable.

### 3.2 Stabilité des systèmes linéaires en dimension 2

Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  un système linéaire d'ordre 2, où  $\mathbb{A}$  est une matrice  $2 \times 2$  à coefficients constants. Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres (généralisées) de  $\mathbb{A}$  et  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  les vecteurs propres (généralisés) associés. Si l'une des valeurs propres est nulle, on se ramène essentiellement à un système linéaire à une variable, cas qu'on laissera en exercice (sauf le cas où  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  et  $\mathbb{A}$  n'est pas diagonalisable, e.g.

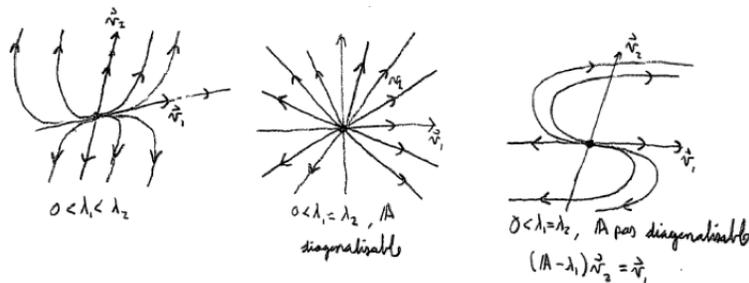
$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ). On supposera donc pour la suite que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ne sont pas nulles.

**Cas 1 :**  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ .

Dans ce cas, la solution générale est de la forme  $C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  si  $\mathbb{A}$  est diagonalisable, et plutôt  $C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_1 t} (t\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$  avec  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  si  $\lambda_1 = \lambda_2$  et  $\vec{v}_2$  est un vecteur propre généralisé :

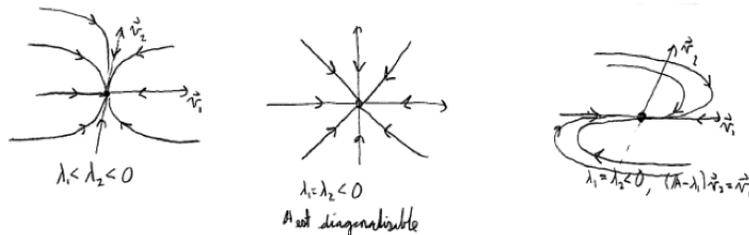
$$(\mathbb{A} - \lambda_1)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Dans les deux cas, les solutions s'éloignent indéfiniment de l'origine, sauf la solution stationnaire. Le point d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est instable. On dit que c'est un noeud instable :



**Cas 2 :**  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ .

C'est la solution inversée du cas précédent. Toutes les solutions convergent vers l'origine. Le point d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est stable. On dit que c'est un noeud stable.



**Cas 3 :**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

Dans ce cas, sauf pour les solutions dans le sous-espace engendré par  $\vec{v}_1$ , les solutions tendent vers l'infini lorsque  $t \rightarrow \infty$ , la solution générale étant  $\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Le point d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est donc instable. On dit que c'est un col.



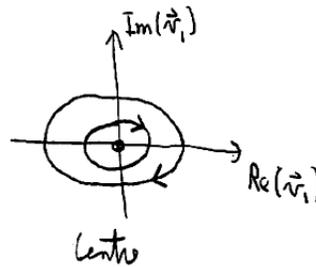
**Cas 4 :**  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \neq 0$  avec  $\text{Re}(\lambda_1) = 0$  (disons  $\lambda_1 = i\nu$ ,  $\lambda_2 = -i\nu$ ,  $\nu > 0$ ).  
 Dans ce cas, la solution générale est de la forme

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{i\nu t} \vec{v}_1 + C_2 e^{-i\nu t} \vec{v}_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Les solutions réelles sont de la forme  $\vec{x}(t) = \text{Re}(C_1 e^{i\nu t} \vec{v}_1)$ ,  $C_1 \in \mathbb{C}$ , donc

$$\vec{x}(t) = A(\cos(\nu t) \text{Re}(\vec{v}_1) - \sin(\nu t) \text{Im}(\vec{v}_1)) + B(\sin(\nu t) \text{Re}(\vec{v}_1) + \cos(\nu t) \text{Im}(\vec{v}_1)), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

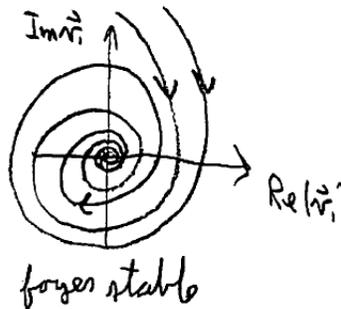
Les trajectoires des solutions sont des ellipses centrées autour de l'origine. Le point d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est donc stable. Il n'est toutefois pas asymptotiquement stable. On dit que c'est un centre.



**Cas 5 :**  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \neq 0$  avec  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  (i.e.  $\lambda_1 = -r + i\nu$  avec  $r > 0$ ).  
 Dans ce cas, la solution générale est

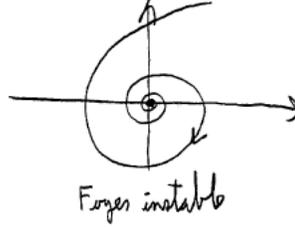
$$\vec{x}(t) = e^{-rt} ((A(\cos(\nu t) \text{Re}(\vec{v}_1) - \sin(\nu t) \text{Im}(\vec{v}_1)) + B(\sin(\nu t) \text{Re}(\vec{v}_1) + \cos(\nu t) \text{Im}(\vec{v}_1))), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Les trajectoires sont des spirales tendant vers 0. Le point d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est donc asymptotiquement stable. On dit que c'est un foyer stable.



**Cas 6 :**  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ ,  $\text{Im}(\lambda_1) \neq 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ .

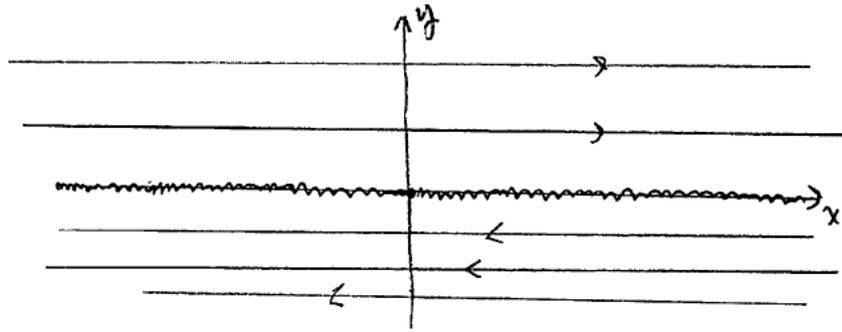
Dans ce cas, les trajectoires sont des spirales qui tendent vers l'infini. Le point d'équilibre  $\vec{x}_0$  est donc instable. On dit que c'est un foyer instable.



**Cas dégénéré :** Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  et  $\mathbb{A}$  n'est pas diagonalisable, e.g.  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on ne peut pas réduire le système à un système de dimension 1. La solution générale est

$$\exp(t\mathbb{A}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \left( \text{Id} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 t \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Les points singuliers sont de la forme  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et les trajectoires dans l'espace des phases sont des droites horizontales ou des points sur l'axe des  $x$  (des solutions stationnaires).



Clairement dans ce cas, toutes les positions d'équilibre sont instables.

Ces observations donnent lieu au résultat suivant.

**Théorème 3.5.** *On considère le système linéaire  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  avec  $\mathbb{A}$  une matrice 2 par 2 telle que  $\det(\mathbb{A}) \neq 0$ . Alors la position d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est stable si et seulement si les valeurs propres (généralisées) de  $\mathbb{A}$  ont des parties réelles négatives. La position d'équilibre  $\vec{x} = 0$  est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres (généralisées) de  $\mathbb{A}$  ont des parties réelles strictement négatives.*

### 3.3 Les équations de Volterra (système proie-prédateur)

Les équations de Volterra (ou Volterra-Lotka) modélisent l'évolution des populations de deux espèces, l'une étant la proie de l'autre, par exemple, les populations de lièvres et de lynx au Canada. On dénote par  $x$  le nombre de proies et par  $y$  le nombre de prédateurs. En supposant que  $x$  et  $y$  sont assez grands de sorte qu'on puisse approximativement les traiter comme des variables continues,

les équations de Volterra prennent la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \quad (25)$$

avec  $a, b, c, d$  des constantes strictement positives. En l'absence de prédateurs, le modèle prédit que la population de proies va croître exponentiellement. En l'absence de proies, le modèle prédit aussi que la population de prédateurs va décroître exponentiellement rapidement. Dans le système, le terme  $-bxy$  correspond au fait que, plus il y a de proies et de prédateurs, plus des proies seront mangées par les prédateurs. Enfin, le terme  $dxy$  rend compte du fait que la population de prédateurs proliférera si les proies sont abondantes. Évidemment, pour que les équations aient un sens biologique, on suppose que  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .

**Question 3.6.** *Le système possède-t-il des positions d'équilibre ?*

Si  $(x, y)$  est une telle position d'équilibre, il faut que

$$\begin{cases} 0 = ax - bxy = x(a - by), \\ 0 = -cy + dxy = y(-c + dx), \end{cases}$$

ce qui montre que

$$x = y = 0 \text{ et } (x, y) = \left( \frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$$

sont les deux positions d'équilibre. Pour  $(0, 0)$ , c'est un point instable, puisque  $(e^{at}, 0)$  est une solution arbitrairement proche de  $(0, 0)$  pour  $t \ll 0$  et arbitrairement loin de  $(0, 0)$  pour  $t \gg 0$ . Pour la deuxième position d'équilibre, on peut remarquer en isolant  $dt$  dans (25) que :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x(a - by)} = dt = \frac{dy}{y(-c + (d)x)} &\implies \frac{(-c + (d)x)dx}{x} = \frac{(a - by)dy}{y} \\ \implies -c \log x + (d)x &= a \log y - by + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Les trajectoires des solutions sont donc données par les courbes de niveau de la fonction :

$$L(x, y) := (d)x - c \log x + by - a \log(y).$$

En effet, le long d'une solution  $(x(t), y(t))$ , on a que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L(x(t), y(t))) &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \left(d - \frac{c}{x}\right) (x(a - by)) + \left(b - \frac{a}{y}\right) y(-c + dx) \\ &= (dx - c)(a - by) + (by - a)(dx - c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Lemme 3.7.** *La fonction  $L$  atteint son minimum seulement en  $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ .*

*Démonstration.* D'abord  $\frac{\partial L}{\partial x} = d - \frac{c}{x}$  et  $\frac{\partial L}{\partial y} = b - \frac{a}{y}$ , donc  $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0$  seulement  $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ , qui

est donc le seul point critique de  $L$  pour  $x > 0, y > 0$ . De plus, en ce point :

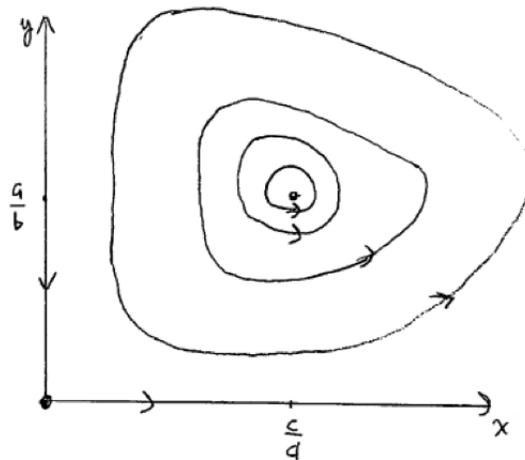
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{c}{x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{a}{y^2} > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

Les valeurs propres du hessien sont donc strictement positives, données par  $\lambda_1 = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = \frac{d^2}{c}$  et  $\lambda_2 = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = \frac{b^2}{a}$ . Le point  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est donc un minimum local. Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x, y_0) = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} L(x_0, y) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x, y_0) = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} L(x_0, y) = +\infty \quad (26)$$

pour  $x_0 > 0$  et  $y_0 > 0$ , on voit par le cours MAT1115-Calcul I que  $L(x, y)$  atteint son minimum seulement en  $(x, y) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ . □

Par (26), on voit aussi que les courbes de niveau de  $L$  sont bornées, puisque  $L(x, y) \rightarrow \infty$  pour  $x \rightarrow 0^+, +\infty$  ou  $y \rightarrow 0^+, +\infty$ . Les trajectoires des solutions dans l'espace des phases ont cette allure :



Sauf pour les positions d'équilibre et les trajectoires sur les axes  $x$  et  $y$ , les trajectoires sont des courbes fermées tournant autour de la position d'équilibre dans le sens anti-horaire. Comme pour la position d'équilibre  $(0, 0)$  du pendule, on déduit que la position d'équilibre  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est stable, mais pas asymptotiquement stable. En particulier, lorsque  $L$  a une grande valeur,  $x$  et  $y$  peuvent être très élevés, mais ils peuvent aussi être très petits. Si la valeur de  $L$  est trop élevée, il peut donc y avoir à terme un danger d'extinction pour l'une des deux espèces (si  $x$  ou  $y$  devient trop petit).

### 3.4 Fonction de Liapounov

Tant pour l'équation du pendule que pour les équations de Volterra, la manière dont on a établi la stabilité d'une position d'équilibre peut être formalisée à l'aide de la fonction de Liapounov.

**Théorème 3.8** (Liapounov). *Soit  $x^*$  un point singulier d'un champ de vecteurs  $\vec{v} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Soit  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x^*$  dans  $\mathcal{U}$  telle que :*

1.  $L(x^*) = 0$  et  $L(\vec{x}) > 0$  pour tout  $\vec{x} \in \mathcal{V} \setminus \{x^*\}$ ;
2.  $\frac{dL}{dt} \leq 0$  sur  $\mathcal{V} \setminus \{x^*\}$  le long des solutions du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$ .

Alors  $\vec{x} = x^*$  est une position d'équilibre stable.

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  et considérons la boule

$$B_\varepsilon(x^*) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - x^*\| < \varepsilon\}$$

On suppose que la fermeture  $\bar{B}_\varepsilon(x^*)$  de  $B_\varepsilon(x^*)$  est contenue dans  $\mathcal{V}$ . Soit  $\alpha$  le minimum de  $L$  sur  $\partial B_\varepsilon(x^*)$ , de sorte que  $\alpha > 0$  par la propriété 1 de  $L$ . Puisque  $L$  est continue,

$$\mathcal{W} := \{\vec{x} \in B_\varepsilon(x^*) \mid L(\vec{x}) < \alpha\}$$

est un ouvert contenant  $x^*$ . Soit  $\delta > 0$  assez petit de sorte que  $B_\delta(x^*) \subset \mathcal{W}$ . Par la propriété 2, toutes solutions  $\vec{x}(t)$  avec  $\vec{x}(0) \in B_\delta(x^*)$  est telle que  $\vec{x}(t) < \alpha$  pour  $t \geq 0$ . En particulier, elle ne peut pas être prolongée vers l'avant jusqu'à  $\partial B_\varepsilon(x^*)$ . Cela montre que  $x^*$  est une position d'équilibre stable.  $\square$

**Théorème 3.9.** *Si de plus l'inégalité est stricte dans la propriété 2 du théorème précédent, alors la position d'équilibre  $x^*$  est asymptotiquement stable.*

*Démonstration.* Par le résultat précédent, la position d'équilibre est stable, donc pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que toute solution  $\vec{x}(t)$  avec  $\vec{x}(0) \in B_\delta(x^*)$  se prolonge indéfiniment vers l'avant dans  $B_\varepsilon(x^*)$ . Si  $\vec{x}(t)$  est une telle solution, il faut montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x}(t) = x^*.$$

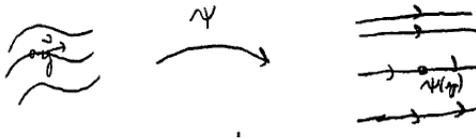
Puisque  $\bar{B}_\varepsilon(x^*)$  est compact, on sait au moins qu'il existe une suite croissante  $\{t_n\}$  telle que  $\vec{x}(t_n) \rightarrow \vec{y} \in \bar{B}_\varepsilon(x^*)$  lorsque  $t_n \rightarrow \infty$ . Comme  $L$  décroît strictement le long du flot, on a par continuité que  $\forall t \geq 0$ ,

$$L(\vec{x}(t)) > \lim_{n \rightarrow +\infty} L(\vec{x}(t_n)) = L(\vec{y}). \quad (27)$$

Si  $\vec{y} = x^*$ , alors par continuité de  $L$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L(\vec{x}(t)) = L(x^*)$$

et il faut en fait que  $\vec{x}(t) \rightarrow x^*$  quand  $t \rightarrow \infty$ , puisque  $\{\vec{x}(t) \in V \mid L(\vec{x}) < \mu\}$  est un voisinage de  $x^*$  qui est arbitrairement petit en prenant  $\mu > 0$  suffisamment petit. Il suffit donc de montrer que  $\vec{y} = x^*$ . Si ce n'était pas le cas,  $\vec{y}$  ne serait pas un point singulier et on pourrait redresser le champ de vecteurs  $\vec{v}$  dans un voisinage de  $\vec{y}$  par le Théorème 2.30.



Comme  $L$  est strictement décroissante le long des solutions du système d'EDO, en prenant ce voisinage plus petit si nécessaire, on peut supposer que sur chacune des trajectoires qu'il contient, il y a des points où  $L$  atteint une valeur strictement inférieure à  $L(\bar{y})$ . Ainsi, si  $\vec{x}(t_n)$  est dans ce voisinage, il existera  $s > 0$  tel que  $L(\vec{x}(t_n + s)) < L(\bar{y})$ , en contradiction avec (27). Pour éviter une contradiction, il faut donc admettre que  $\bar{y} = x^*$ . □

**Définition 3.10.** Soit  $\vec{v} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x^*$  est un point singulier de  $\vec{v}$ , la linéarisation du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  en  $x^*$  est le système linéaire

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}(\vec{x})$$

avec  $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la différentielle  $d\vec{v}_{x^*} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $\vec{v}$  en  $x^*$ . Dans ce cas,  $\vec{x} = 0$  est une position d'équilibre de la linéarisation correspondant à  $x^*$  pour le système linéaire.

**Exemple 3.11.** Pour les équations de Volterra

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by), \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx), \end{cases}$$

la linéarisation en  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  est obtenue en introduisant les variables  $X = x - \frac{c}{d}$ ,  $Y = y - \frac{a}{b}$ , en quel cas le système est donné par

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -(X + \frac{c}{d})b(Y) = -\frac{cb}{d}Y - bXY, \\ \frac{dY}{dt} = (Y + \frac{a}{b})d(X) = \frac{ad}{b}X + dXY. \end{cases}$$

La linéarisation en  $(x, y) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ , i.e. en  $(X, Y) = (0, 0)$ , est obtenue en négligeant les termes quadratiques :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -\frac{cb}{d}Y \\ \frac{dY}{dt} = \frac{ad}{b}X \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (28)$$

**Exercice 3.12.** Montrer que  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un centre pour la linéarisation (28).

**Exemple 3.13.** Pour les équations du pendule,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(\theta, y) \\ F_2(\theta, y) \end{pmatrix}$$

On calcule que  $\frac{\partial F_1}{\partial \theta} = 0$ ,  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial \theta} = -\frac{g}{\ell} \cos(\theta)$  et  $\frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$ . La linéarisation en  $(0, 0)$  est donc

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}(\vec{x}) \quad \text{avec} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta}(0, 0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta}(0, 0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

En  $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ , la linéarisation est plutôt :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}(\vec{x}) \quad \text{avec} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta}(\pi, 0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\pi, 0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta}(\pi, 0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\pi, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.14.** Montrer que la linéarisation en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , qui correspond à l'approximation pour les petits angles, est un centre, alors que la linéarisation en  $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$  est un col.

Dans les exemples précédents, les linéarisations sont de bonnes approximations des systèmes non-linéaires au voisinage des points singuliers, notamment d'un point de vue qualitatif. Ce n'est toutefois pas toujours le cas comme le montre l'exemple suivant.

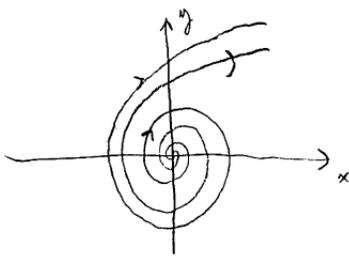
**Exemple 3.15.** On considère le système non-linéaire

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 1 \\ -1 & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ayant  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  comme position d'équilibre. Ce système peut être résolu exactement en utilisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  pour donner :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{dr}{r^3} = \int dt \\ \theta(t) = -t + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{2r^2} = t + K \\ \theta(t) = -t + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{C_2 - 2t}} \\ \theta(t) = -t + C_1 \end{cases}$$

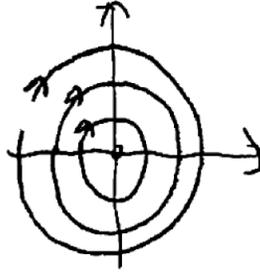
avec  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Cela nous permet de dresser le portrait suivant des trajectoires :



Clairement,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un foyer instable. De plus, les solutions peuvent être prolongées indéfiniment vers l'arrière, mais pas vers l'avant. Or, la linéarisation correspondante en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et les trajectoires sont des cercles parcourus dans le sens horaire avec  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  un centre :



Le problème dans ce cas est que les valeurs propres de la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

du système linéaire sont purement imaginaires. Intuitivement, même si petite, la perturbation non-linéaire a pour effet d'ajouter une partie réelle positive en quelque sorte.

On a le théorème suivant en général.

**Théorème 3.16** (Théorème de linéarisation). Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  un système non-linéaire avec  $\vec{v}$  de classe  $C^2$  sur un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $x^*$  est un point singulier de  $\vec{v}$  et si les valeurs propres de la matrice  $\mathbb{A}$  intervenant dans la linéarisation  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  du système en  $x^*$  ne sont pas purement imaginaires, alors dans un voisinage  $V$  de  $x^*$ , le système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  est topologiquement équivalent à sa linéarisation, c'est-à-dire que si  $\phi_t$  et  $\Phi_t$  dénotent les flots de  $\vec{v}$  et de sa linéarisation, alors il existe un homéomorphisme  $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  avec  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  des voisinages de  $x^*$  et 0 dans  $\mathcal{U}$  et  $\mathbb{R}^n$  respectivement tel que

1.  $h(x^*) = 0$ ;
2.  $h \circ \phi_t = \Phi_t \circ h$ .

*Démonstration.* On va démontrer ce théorème dans le cas où les parties réelles des valeurs propres associées à la linéarisation ont toutes le même signe. En inversant le flot, si nécessaire, on pourra supposer que ces parties réelles sont strictement négatives, de sorte que 0 sera une position d'équilibre asymptotiquement stable. La démonstration s'appuiera alors sur la construction d'une fonction de Liapounov adaptée.

Supposons d'abord que la matrice  $\mathbb{A}$  est diagonalisable. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  (on prend  $\mathbb{C}^n$  plutôt que  $\mathbb{R}^n$  au cas où il y aurait des valeurs propres complexes) est constituée de vecteurs propres de  $\mathbb{A}$ . Considérons alors la forme quadratique

$$Q(z, z) = \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i \text{ avec } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

Comme on prend le conjugué complexe, remarquons que  $Q$  est à valeurs réelles positives.

Le long d'une solution du système linéarisé, on a alors pour  $z \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Q(z, z) &= \sum_i \left( \frac{dz_i}{dt} \bar{z}_i + z_i \frac{d\bar{z}_i}{dt} \right) \\
&= \sum_{i,j} (a_{ij} z_j \bar{z}_j + z_i \bar{a}_{ij} \bar{z}_j) \\
&= 2\operatorname{Re} \left( \sum_{i,j} (a_{ij} z_j \bar{z}_j) \right) \\
&= \sum_i \operatorname{Re}(\lambda_i z_i \bar{z}_i) \text{ car la base canonique est une base de vecteurs propres avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \\
&\qquad\qquad\qquad \text{les valeurs propres associées,} \\
&= \sum_i \operatorname{Re}(\lambda_i) |z_i|^2 < 0 \text{ car on suppose que } \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \text{ pour tout } i.
\end{aligned}$$

En restreignant  $Q$  au sous-espace réel où le flot était initialement défini, on obtient donc une fonction de Liapounov pour la linéarisation du système. Si  $L$  est cette fonction, alors

1.  $L(0) = 0$ ,  $L(\vec{x}) > 0$  pour  $\vec{x} \neq 0$  ;
2.  $dL_{\vec{x}}(\mathbb{A}\vec{x}) < 0$  pour  $\vec{x} \neq 0$ .

Comme  $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbb{A}\vec{x} + O(|\vec{x}|^2)$  (en supposant sans perte de généralité que  $x^* = 0$ ), on a aussi que

$$dL_{\vec{x}}(\vec{v}(\vec{x})) = dL_{\vec{x}}(\mathbb{A}\vec{x}) + O(|\vec{x}|^3) \quad \text{avec} \quad dL_{\vec{x}}(\mathbb{A}\vec{x}) = O(|\vec{x}|^2).$$

Ainsi, pour  $|\vec{x}| \geq 0$  assez petit,  $L$  sera aussi une fonction de Liapounov stricte pour  $\vec{v}$ , i.e. :  $dL_{\vec{x}}(\vec{v}(\vec{x})) < 0$  pour  $\vec{x} \neq 0$  dans un voisinage  $V$  de  $x^* = 0$ . La position d'équilibre  $x^*$  du système linéaire sera donc asymptotiquement stable (comme sa linéarisation).

Pour établir l'existence de l'homéomorphisme  $h$ , on considère l'hypersurface

$$S_\varepsilon = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\vec{x}) = \varepsilon\}$$

pour  $\varepsilon > 0$  assez petit. Pour  $x_0 \in S_\varepsilon$  et  $t > 0$ , on pose :

$$h(\Phi_t(x_0)) := \phi_t(x_0).$$

En posant aussi  $h(0) = 0$ ,  $h$  est alors défini partout sur  $B_\varepsilon = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\vec{x}) < \varepsilon\}$ . En effet, par monotonie de  $L$  le long des flots de  $\vec{v}$  et  $\vec{x} \mapsto \mathbb{A}\vec{x}$ , pour chaque  $\vec{x} \in B_\varepsilon \setminus \{0\}$ ,  $\exists ! t > 0$  et  $\vec{x}_0 \in S_\varepsilon$  tels que  $\Phi_t(\vec{x}_0) = \vec{x}$ .



De plus,  $h$  est une bijection. Par la régularité des flots,  $h$  et son inverse sont continues sur  $B_\varepsilon \setminus \{0\}$ , et même différentiables. La continuité de  $h$  en 0 découle du fait que la décroissance de  $L$  le long des flots  $\phi_t$  et  $\Phi_t$  est uniforme :

$$\forall \delta > 0, \exists N \mid t > N \Rightarrow L(\phi_t(x_0)) < \delta, L(\Phi_t(x_0)) < \delta \quad \forall x_0 \in S_\varepsilon.$$

En effet, si un tel  $N$  n'existait pas, disons pour  $\phi_t$ , alors il existerait une suite  $\{x_i\} \subset S_\varepsilon$  et  $\{t_i\} \subset \mathbb{R}$  avec  $t_i \rightarrow \infty$  et  $t_{i+1} > t_i \forall i$  telle que  $L(\phi_{t_i}(x_i)) \geq \delta$ . Par compacité de  $S_\varepsilon$ , quitte à prendre une sous-suite, on pourrait alors supposer que  $x_i \rightarrow x_\infty \in S_\varepsilon$ . Par la dépendance continue sur les conditions initiales, on aurait donc que  $L(\phi_t(x_\infty)) \geq \delta, \forall t \geq 0$ , contredisant notre résultat sur les fonctions de Liapounov strictes (Théorème 3.9).

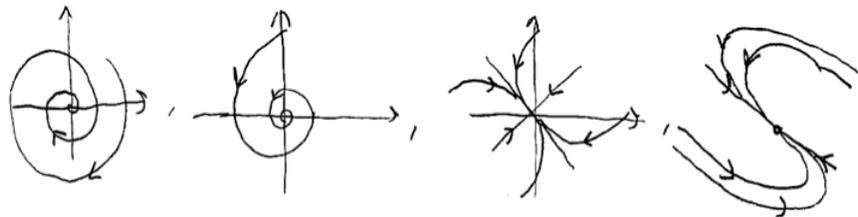
Si la matrice  $\mathbb{A}$  n'est pas diagonalisable, en la perturbant légèrement, on peut obtenir une matrice diagonalisable avec aussi des valeurs propres ayant des parties réelles strictement négatives. Si la perturbation est assez petite, la fonction de Liapounov qu'on lui associe comme ci-haut sera aussi une fonction de Liapounov stricte pour  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  et  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$ . On peut alors procéder comme auparavant (voir aussi [Arn88, §22.4 et §22.5] pour une approche différente lorsque  $\mathbb{A}$  n'est pas diagonalisable). Cela termine la démonstration du théorème de linéarisation (quand les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives).  $\square$

Remarquons que le même argument montre que le flot de  $\vec{v}$  est topologiquement équivalent au flot du système

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{x},$$

ce qui donne lieu au corollaire suivant.

**Corollaire 3.17.** *Les foyers stables et les noeuds stables sont tous topologiquement équivalents, près de la position d'équilibre, au noeud du système standard  $\frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{x}$ .*



sont topologiquement équivalents à



**Corollaire 3.18.** *La position d'équilibre  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  du pendule avec friction est asymptotiquement stable.*

*Démonstration.* En effet, la linéarisation de

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\gamma y - \frac{g}{\ell} \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

est

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{\ell} & -\gamma \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbb{A} - \lambda \text{Id}) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{-g}{\ell} & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{g}{\ell} \\ &= \left(\lambda + \frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{g}{\ell} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \frac{g}{\ell}} \end{aligned}$$

ce qui montre que les parties réelles des valeurs propres de  $\mathbb{A}$  sont strictement négatives. Ceci implique que  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est asymptotiquement stable par le théorème de linéarisation. □

### 3.5 Classification des systèmes linéaires (homogènes)

On peut utiliser les résultats de stabilité pour classifier les systèmes linéaires. Plusieurs classifications sont possibles.

**Définition 3.19.** *Deux flots de champs de vecteurs  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\psi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont équivalents s'il y a une bijection  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h \forall t \in \mathbb{R}$ . Plus précisément, ces flots sont :*

1. linéairement équivalents si  $h$  est une application linéaire ;
2. différentiablement équivalents si  $h$  est un difféomorphisme ;
3. topologiquement équivalents si  $h$  est un homéomorphisme.

Puisque la linéarité implique la différentiabilité, qui elle-même implique la continuité, on a la suite d'implications

$$\begin{aligned} \phi_t \text{ et } \psi_t \text{ sont linéairement équivalents} &\implies \text{ ils sont différentiablement équivalents,} \\ &\implies \text{ ils sont topologiquement équivalents.} \end{aligned}$$

**Théorème 3.20** (Classification linéaire). *Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  deux matrices  $n \times n$ . Alors les flots des systèmes  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  et  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{B}\vec{x}$  sont équivalents si et seulement si  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  ont la même forme de Jordan.*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ ) Si  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  ont la même forme de Jordan, il existe une matrice inversible  $\mathbb{M}$  telle que

$$\mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{B}.$$

Si  $\phi_t$  est le flot du système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$ , alors  $\psi_t := \mathbb{M}\phi_t\mathbb{M}^{-1}$  est le flot de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{B}\vec{x}$ , puisque

$$\frac{d\psi_t}{dt} = \mathbb{M} \frac{d\phi_t}{dt} \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}\mathbb{A}\phi_t\mathbb{M}^{-1} = (\mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{M}^{-1})(\mathbb{M}\phi_t\mathbb{M}^{-1}) = \mathbb{B}\psi_t.$$

Il suffit donc de prendre  $h(\vec{x}) = \mathbb{M}\vec{x}$  pour voir que les deux flots sont conjugués.

$\Rightarrow$ ) Si  $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$  pour une application linéaire  $h$  inversible donnée par  $h(\vec{x}) = \mathbb{M}\vec{x}$ , alors

$$\begin{aligned} \psi_t = h \circ \phi_t \circ h^{-1} &\Rightarrow \mathbb{B}\psi_t = \frac{d\psi_t}{dt} = \mathbb{M} \frac{d\phi_t}{dt} \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}\mathbb{A}\phi_t\mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{M}\phi_t\mathbb{M}^{-1}, \\ &\Rightarrow \mathbb{B}\psi_t = (\mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{M}^{-1})\psi_t, \\ &\Rightarrow \mathbb{B} = \mathbb{M}\mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}, \end{aligned}$$

donc  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  ont la même forme de Jordan. □

Même si l'équivalence différentiable est en principe plus faible que l'équivalence linéaire, elles sont en fait équivalentes pour les systèmes linéaires.

**Théorème 3.21** (Classification différentiable). *Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  deux matrices  $n \times n$ . Alors les flots des systèmes  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  et  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{B}\vec{x}$  sont différentiablement équivalents si et seulement s'ils sont linéairement équivalents.*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ ) Cette implication est évidente.

$\Rightarrow$ ) Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme reliant le flot  $\phi_t$  de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  avec le flot de  $\psi_t$  de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{B}\vec{x}$  :

$$h \circ \phi_t h^{-1} = \psi_t.$$

Comme 0 est une position d'équilibre du flot  $\phi_t$ ,  $h$  envoie 0 sur une position d'équilibre  $\vec{c}$  du flot  $\psi_t$  (attention, 0 n'est pas nécessairement la seule position d'équilibre de  $\psi_t$ ) :  $h(0) = \vec{c}$  et  $\mathbb{B}h(0) = 0$ . Or, le difféomorphisme de translation

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\mapsto \vec{x} - \vec{c} \end{aligned}$$

envoie le flot  $\psi_t$  sur lui-même, puisque

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{B}\vec{x} &\Rightarrow \frac{d}{dt}(T(\vec{x})) = \frac{d}{dt}(\vec{x} - \vec{c}) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{B}\vec{x} = \mathbb{B}(\vec{x} - \vec{c}) \text{ car } \mathbb{B}\vec{c} = 0, \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}(T(\vec{x})) = \mathbb{B}T(\vec{x}). \end{aligned}$$

Le difféomorphisme  $h_1 = T \circ h$  envoie donc le flot  $\phi_t$  sur le flot  $\psi_t$  en fixant l'origine :

$$h_1 \circ \phi_t \circ h_1^{-1} = \psi_t, \quad \text{et} \quad h_1(0) = 0. \quad (29)$$

Soit  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la différentielle de  $h_1$  en 0. Par (29), les difféomorphismes  $h_1 \circ e^{t\mathbb{A}}$  et  $e^{t\mathbb{B}} \circ h_1$  coïncident pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Leurs différentielles (spatiales) coïncident donc quelque soit  $t$  :

$$H \circ e^{t\mathbb{A}} = e^{t\mathbb{B}} \circ H.$$

On a donc que  $H \circ \phi_t = \psi_t \circ H$ , c'est-à-dire que les flots  $\phi_t$  et  $\psi_t$  sont linéairement équivalents.  $\square$

Les équivalences linéaires et différentiables sont beaucoup plus fines que l'équivalence topologique. Un foyer n'est jamais équivalent différentiablement à un noeud. L'équivalence différentiable permet aussi de distinguer des noeuds entre eux, des foyers entre eux et des cols entre eux. Pour l'équivalence topologique, on a la version linéaire suivante du théorème de linéarisation.

**Théorème 3.22** (Classification topologique). *Soient  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  deux matrices  $n \times n$  n'ayant aucune valeur propre purement imaginaire. Alors les systèmes  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  et  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{B}\vec{x}$  sont topologiquement équivalents si et seulement si  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  ont le même nombre de valeurs propres ayant une partie réelle positive (ou négative).*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ ) D'abord, on peut montrer (exercice!) qu'un produit direct de systèmes topologiquement équivalents sont topologiquement équivalents. Quitte à possiblement inverser les flots, on peut donc se ramener au cas où les matrices  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  n'ont que des valeurs propres ayant des parties réelles strictement négatives. Par le théorème de linéarisation, les systèmes sont tous deux équivalents topologiquement au système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{x}$ . En fait, comme les systèmes sont linéaires, les homéomorphismes établissant ces équivalences peuvent être définis partout sur  $\mathbb{R}^n$ .

$\Rightarrow$ ) Si les flots sont topologiquement équivalents, les sous-espaces correspondant aux trajectoires convergeant vers 0 sont de même dimension (cette dimension pouvant être détectée topologiquement). Or, dans les deux cas, cette dimension correspond au nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) ayant une partie réelle strictement négative.  $\square$

### 3.6 Exercices

1. Déterminer la nature et la stabilité du point singulier  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  du système linéaire  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  si :

(a)  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ;

(b)  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ ;

(c)  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ;

(d)  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -17 & -5 \end{pmatrix}$ ;

(e)  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ;

(f)  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ ;

(g)  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

2. On considère le système linéaire  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  avec  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(a) Quels sont les points singuliers de ce système ?

(b) Tracer un portrait des trajectoires des solutions dans l'espace des phases.

(c) Pour chaque position d'équilibre, déterminer si elle est stable, asymptotiquement stable ou instable.

3. Dans le système de Volterra, montrer que  $\frac{d^2y}{dt^2} > 0$  dès que  $\frac{dx}{dt} > 0$ . Similairement, montrer que  $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$  dès que  $\frac{dy}{dt} < 0$ . Expliquer concrètement ce que le modèle prédit dans ces deux cas.

4. Pour le système

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\gamma y - \frac{g}{\ell} \sin \theta \end{pmatrix}$$

du pendule avec friction, montrer que la position d'équilibre  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est asymptotiquement stable en invoquant le théorème de linéarisation.

5. On considère une particule de masse  $m$  contrainte de se déplacer sur la parabole d'équation  $y = x^2$  dans le plan et soumise à l'accélération gravitationnelle de  $g$  vers le bas. Si on utilise la coordonnée  $x$  pour décrire la position de la particule, alors son énergie potentielle est donnée par

$$U = mgx^2.$$

En termes de  $x$  et  $v := \frac{dx}{dt}$ , son énergie cinétique est donnée par

$$T = \frac{1}{2}m(1 + 4x^2)v^2$$

et les équations du mouvement de la particule sont données par

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{2x(g + 2v^2)}{1 + 4x^2}.\end{aligned}$$

- (a) Le long des solutions du système, montrer que l'énergie totale  $H = T + U$  de la particule est préservée.
  - (b) Montrer que  $(x, v) = (0, 0)$  est la seule position d'équilibre et déterminer sa nature et sa stabilité.
  - (c) Tracer un portrait des trajectoires du système dans l'espace des phases.
6. Montrer que les équivalences linéaire, différentiable et topologique sont des relations d'équivalence pour les flots de systèmes linéaires.

## 4 Étude qualitative de solutions



Le théorème de redressement et le théorème de linéarisation permettent de mieux comprendre le comportement qualitatif local du flot d'un champ de vecteurs. Dans ce chapitre, nous allons maintenant développer certains outils permettant d'obtenir une description qualitative globale du flot d'un champ de vecteurs.

### 4.1 Équations de Volterra modifiées

Pour prendre en compte la concurrence entre individus d'une même espèce lorsque les ressources sont limitées, on peut considérer la version modifiée suivante des équations de Volterra :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - by - \lambda x), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-e + dx - \mu y),\end{aligned}$$

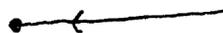
où  $a, b, e, d, \lambda$  et  $\mu$  sont des constantes strictement positives. Lorsque  $y = 0$ , on obtient l'équation  $\frac{dx}{dt} = x(a - \lambda x)$ . Dans ce cas,  $x = 0$  et  $x = \frac{a}{\lambda}$  sont des positions d'équilibre. En regardant le signe de

$\frac{d\bar{x}}{dt}$ , cela donne les trajectoires suivantes :



Donc  $x = \frac{a}{\lambda}$  est une positions d'équilibre asymptotiquement stable de l'équation  $\frac{d\bar{x}}{dt} = x(a - \lambda x)$ , alors que  $x = 0$  est une position d'équilibre instable.

Lorsque  $x = 0$ , on a l'équation  $\frac{dy}{dt} = y(-e - \mu y)$  et  $y = 0$  est la seule position d'équilibre pour  $y \geq 0$ . De plus, comme  $\frac{dy}{dt} < 0$  pour  $y > 0$ , c'est une position d'équilibre stable :



En l'absence de proies, le modèle prédit donc que la population de prédateurs s'éteint éventuellement.

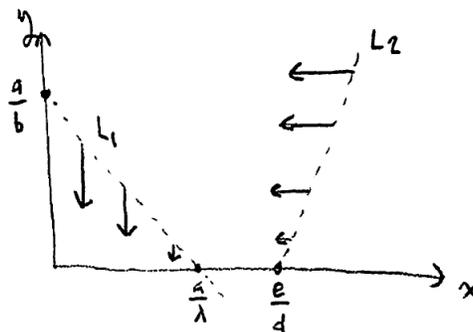
**Question 4.1.** Lorsque  $x > 0$  et  $y > 0$ , y a-t-il d'autres positions d'équilibre ?

Il faut alors que :

$$\begin{cases} \lambda x + by = a, \\ -dx + \mu y = -e. \end{cases}$$

Ce sont les équations des deux droites  $L_1 : \lambda x + by = a$ ,  $L_2 : -dx + \mu y = -e$ .

**Cas 1 :** Les droites ne se croisent pas dans le premier quadrant :



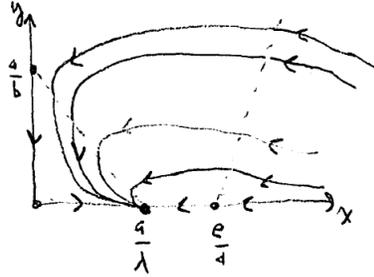
Le long de  $L_1$ , remarquons que le champ de vecteurs

$$\vec{v}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} x(a - by - \lambda x) \\ y(-e + dx - \mu y) \end{pmatrix}$$

du système est vertical et pointe vers le bas. Le long de  $L_2$ ,  $\vec{v}$  est plutôt horizontal et pointe vers la gauche. On dit que  $L_1$  est une isocline verticale et que  $L_2$  est une isocline horizontale.

**Définition 4.2.** Dans l'espace des phases d'un système, une isocline est une courbe le long de laquelle les trajectoires ont la même pente. C'est une isocline horizontale si cette pente est nulle, et une isocline verticale si cette pente est verticale.

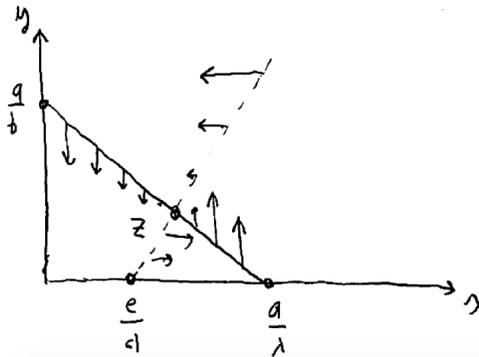
De plus, à droite de  $L_2$ ,  $\vec{v}$  pointe vers le haut, alors qu'à gauche, il pointe vers le bas. De même, à gauche de  $L_1$ ,  $\vec{v}$  pointe vers la droite, alors qu'à droite de  $L_1$ ,  $\vec{v}$  pointe vers la gauche. Cela suggère le portrait des trajectoires suivant :



Dans ce cas,  $(x, y) = (\frac{a}{\lambda}, 0)$  est une position d'équilibre asymptotiquement stable. En fait, peu importe les populations initiales (sauf en  $(x, y) = (0, y)$ ), le système converge vers cette position d'équilibre et la population de prédateurs s'éteint éventuellement. C'est une situation où  $\frac{d\bar{x}}{dt}$  et  $\frac{d\bar{y}}{dt}$  ne peuvent être simultanément strictement positifs.

**Exercice 4.3.** Vérifier que  $(\frac{a}{\lambda}, 0)$  est bien une position d'équilibre asymptotiquement stable en regardant la linéarisation du système en ce point.

**Cas 2 :** Les droites se croisent dans le premier quadrant ( $\frac{e}{d} < \frac{a}{\lambda}$ ) :



Soit  $z = (x_0, y_0)$  le point où les droites se croisent. Calculons la linéarisation du système en ce point :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by - 2\lambda x & -bx \\ dy & -e + dx - 2\mu y \end{pmatrix}.$$

Comme  $(x_0, y_0)$  est sur les droites  $L_1$  et  $L_2$ , on a que  $\lambda x_0 + by_0 = a$  et  $-dx_0 + \mu y_0 = -e$ . La linéarisation en  $z$  est donc  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}$  avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a - by_0 - 2\lambda x_0 & -bx_0 \\ dy_0 & -e + dx_0 - 2\mu y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x_0 & -bx_0 \\ dy_0 & -\mu y_0 \end{pmatrix}.$$

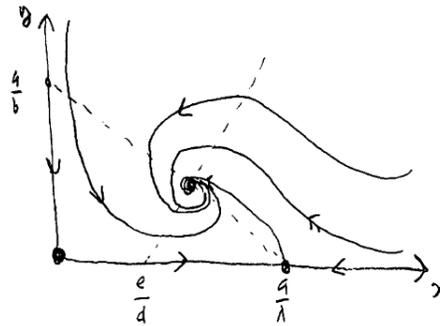
Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de  $\mathbb{A}$ , alors

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(\mathbb{A}) = (\lambda\mu + db)x_0 y_0 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(\mathbb{A}) = -\lambda x_0 - \mu y_0 < 0.$$

Cela montre que les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative. La position d'équilibre est donc asymptotiquement stable par le théorème de linéarisation (Théorème 3.16) et le Théorème 3.5.

**Exercice 4.4.** *En utilisant le théorème de linéarisation, montrer que  $(\frac{a}{\lambda}, 0)$  est un col, donc une position d'équilibre instable.*

Voici une esquisse possible des trajectoires dans l'espace des phases :



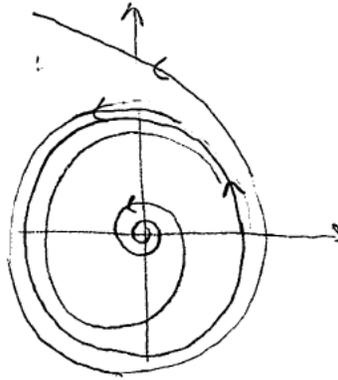
En principe, l'existence d'une solution périodique tournant autour de la position d'équilibre  $(x_0, y_0)$  ne peut pas être exclue comme l'indique l'exemple suivant.

**Exemple 4.5.** *En coordonnées polaires, le système suivant a une solution périodique en  $r = 1$  :*

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -r(1-r), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases}$$

Le système peut être résolu explicitement :

$$\begin{aligned} dt &= \frac{-dr}{r(1-r)} = \frac{-dr}{r} - \frac{dr}{1-r} \implies t + C = \log \left| \frac{r}{1-r} \right|, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &\implies \frac{r}{1-r} = Ke^{-t}, \quad K \in \mathbb{R}, \\ &\implies r = (1-r)Ke^{-t} \implies (1+Ke^{-t})r = Ke^{-t} \\ &\implies r = \frac{e^{-t}}{K'e^{-t} + 1} = \frac{1}{K'e^t + 1}, \quad K' \in \mathbb{R}, \text{ ou } r = 0. \end{aligned}$$



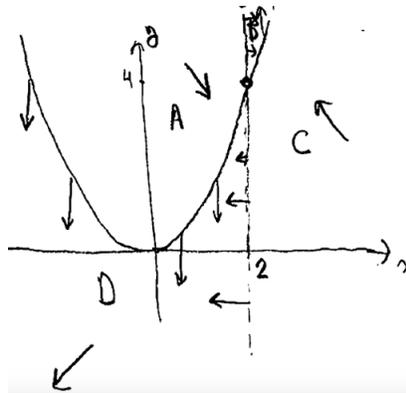
## 4.2 La méthode des isoclines

La notion d'isocline de la Définition 4.2 est très utile pour comprendre le comportement global du flot d'un champ de vecteurs en deux dimensions. La méthode des isoclines consiste à déterminer les isoclines verticales et horizontales du champ de vecteurs. Ces isoclines découpent alors le domaine de définition du champ de vecteurs en régions où le champ de vecteurs ne s'annule pas et pointe dans une direction contenue dans l'un des quatre quadrants du plan cartésien. Les positions d'équilibre sont données par les points où une isocline verticale et une isocline horizontale se coupent. En ces points, on peut utiliser le théorème de linéarisation pour obtenir une description locale du flot. Illustrons cette méthode à l'aide de quelques exemples.

**Exemple 4.6.** On considère le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2. \end{cases}$$

L'isocline verticale est alors la parabole  $y = x^2$ , alors que l'isocline horizontale est la droite  $x = 2$ . Ces isoclines divisent l'espace des phases en quatre régions A, B, C et D telle qu'illustrées :



En particulier, une trajectoire entrant dans les régions B ou D n'en sort pas, puisque  $\vec{v}$  pointe vers l'intérieur sur leur frontière. L'intersection des deux isoclines donne le seul point singulier du champ

de vecteurs correspondant, à savoir le point  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . En ce point, on calcule que

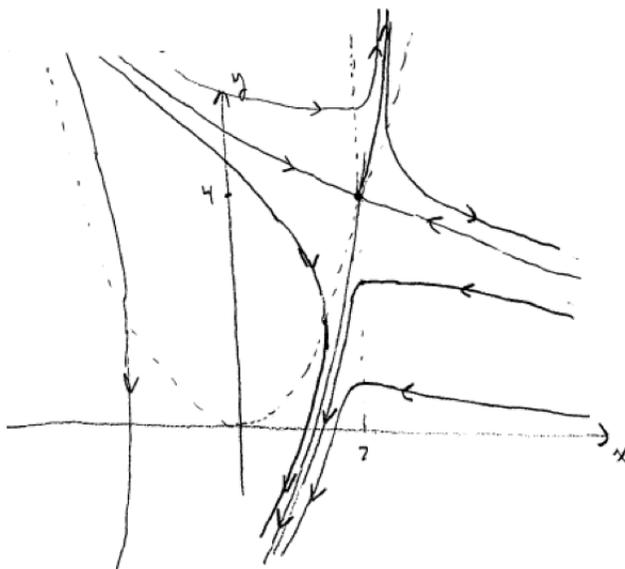
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont données par :

$$0 = \det \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 1 = (\lambda + 2)^2 - 5 \implies \lambda = -2 \pm \sqrt{5},$$

c'est-à-dire que  $\lambda_1 = -2 - \sqrt{5} < 0$  et  $\lambda_2 = -2 + \sqrt{5} > 0$  sont les valeurs propres. Par le théorème de linéarisation (Théorème 3.16), la position d'équilibre  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  est donc un col.

Dans la région A, le champ de vecteurs pointe approximativement vers le Sud-Est et les trajectoires peuvent être prolongées vers l'avant jusqu'à la frontière (sauf une trajectoire qui peut être prolongée indéfiniment vers l'avant et tend vers  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  puisque c'est un col). Similairement, dans la région C, le champ de vecteurs pointe approximativement vers le Nord-Ouest et les solutions peuvent être prolongées vers l'avant jusqu'à la frontière, sauf une trajectoire qui peut être prolongée indéfiniment vers l'avant et tend vers la position d'équilibre. Cela nous permet d'esquisser le portrait des trajectoires suivant :



**Exemple 4.7.** Considérons maintenant le système suivant, dépendant d'un paramètre  $a$  :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 1, \\ \frac{dy}{dt} = -xy + a(x^2 - 1). \end{cases}$$

Les isoclines verticales sont alors données par les droites  $x = \pm 1$ , alors que les isoclines horizontales

sont données par l'équation  $xy = a(x^2 - 1)$ . Les positions d'équilibre sont donc  $(\pm 1, 0)$ . Puisque  $\frac{dx}{dt} = 0$  lorsque  $x = \pm 1$ , le champ de vecteurs est tangent à ces isoclines.

Peu importe la valeur de  $a$ , pour  $x = 1$ ,  $\frac{dy}{dt} = -y$  alors que pour  $x = -1$ ,  $\frac{dy}{dt} = -y$ . Donc sur la droite verticale  $x = 1$ , les solutions tendent vers la position d'équilibre  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors que sur la droite verticale  $x = -1$ , les solutions s'éloignent de la position d'équilibre  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

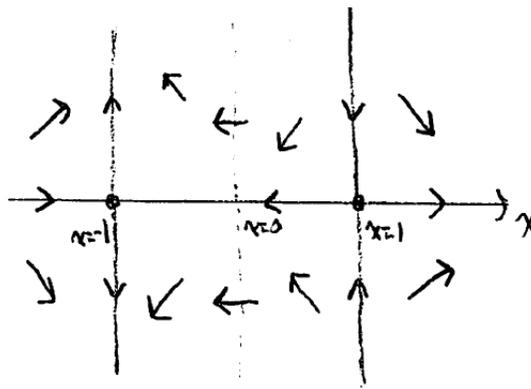
Si  $a = 0$ , le système devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -xy \end{cases}$$

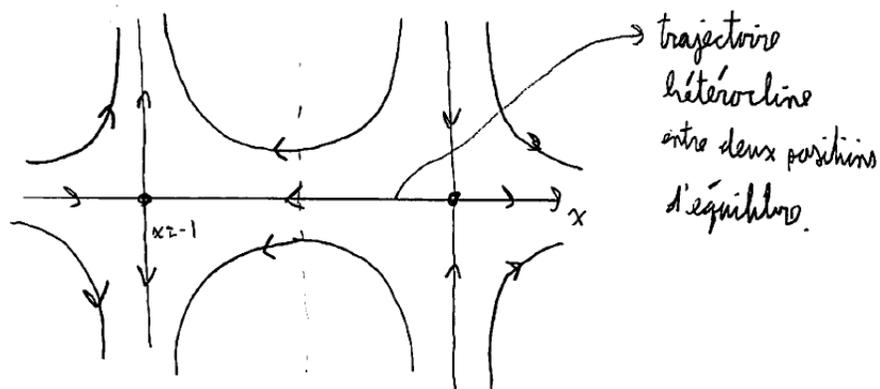
et les isoclines horizontales sont  $x = 0$  et  $y = 0$ . En particulier, le champ de vecteurs est tangent à l'axe des  $x$  et donné par

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

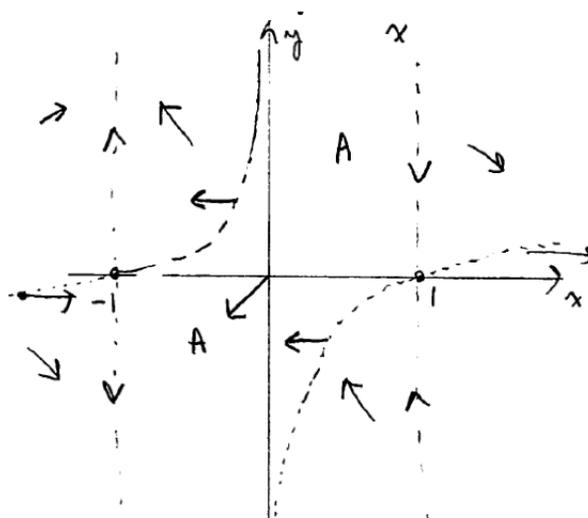
sur cette droite. On a en fait  $\frac{dx}{dt} > 0$  pour  $|x| > 1$  et  $\frac{dx}{dt} < 0$  pour  $|x| < 1$ . En particulier, une trajectoire va de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vers  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ce qui donne le portrait partiel :



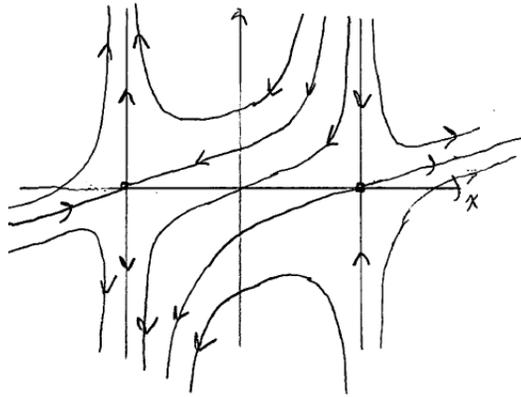
Cela suggère que les positions d'équilibre sont des cols, ce qui peut être confirmé par le théorème de linéarisation. Cela donne le portrait



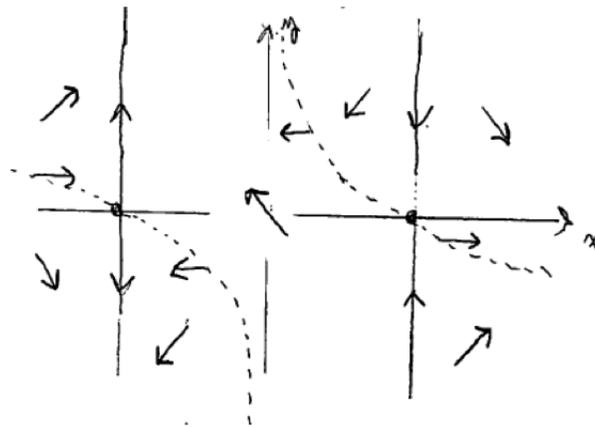
Remarquons qu'on a une trajectoire reliant les deux positions d'équilibre. On dit que c'est une trajectoire hétérocline.  
 Considérons maintenant le cas  $a \neq 0$ . Les isoclines verticales restent les mêmes, mais les isoclines horizontales changent drastiquement et sont données par l'équation  $y = \frac{a(x^2-1)}{x}$ . Supposons que  $a > 0$ .  
 On a alors la situation suivante :



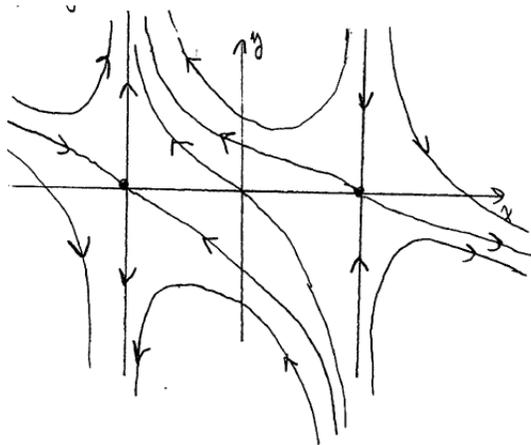
Dans la région A, le champ de vecteurs du système pointe approximativement vers le Sud-Ouest, ce qui a pour effet d'éliminer la trajectoire hétérocline. La trajectoire tendant vers  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  doit maintenant parvenir de  $y = +\infty$ , alors que la trajectoire qui émerge de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  dans la région A tend vers  $y = -\infty$ . En fait, lorsque  $a > 0$ , on assiste à l'ouverture d'un passage Sud-Ouest contenant des trajectoires allant de  $y = +\infty$  vers  $y = -\infty$  dans la région A. Autrement, on peut utiliser le théorème de linéarisation pour vérifier que les positions d'équilibre sont à nouveau des cols, ce qui donne le portrait des trajectoires suivant :



La cas  $a < 0$  est similaire, quoique légèrement inversé, les isoclines horizontales étant réfléchies par rapport à l'axe des  $x$  :



La trajectoire hétérocline disparaît à nouveau, mais cette fois pour laisser place à un passage Nord-Ouest :



Lorsque le paramètre  $a$  passe de strictement négatif à strictement positif, le passage Nord-Ouest se transforme en passage Sud-Ouest. Le changement se produit en  $a = 0$ , une situation limitrophe où le

passage se trouve coupé par une trajectoire hétérocline entre les deux positions d'équilibre. On dit qu'il y a une bifurcation en  $a = 0$ .

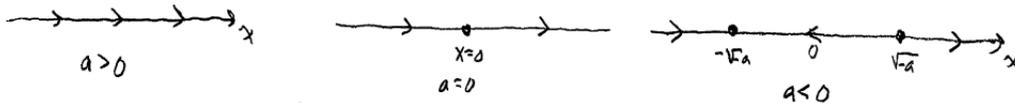
### 4.3 Bifurcations

On peut formaliser la notion de bifurcation de la manière suivante.

**Définition 4.8.** Dans une famille  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_a(\vec{x})$  de systèmes paramétrés par  $a$ , on dit qu'il y a une bifurcation en  $a = a_0$  si le comportement qualitatif du flot change de façon significative lorsqu'on passe d'un système pour  $a < a_0$  à un système pour  $a > a_0$ . Typiquement, le système pour  $a = a_0$  est à la croisée des chemins pour des comportements qualitatifs différents.

Les exemples les plus simples de bifurcations sont obtenus en faisant varier le nombre ou la nature des positions d'équilibre selon le paramètre  $a$ .

**Exemple 4.9.** L'équation  $\frac{dx}{dt} = x^2 + a$  n'a aucune position d'équilibre lorsque  $a > 0$ , une position d'équilibre instable en  $x = 0$  lorsque  $a = 0$ , et deux positions d'équilibre instables en  $x = \pm\sqrt{-a}$  lorsque  $a < 0$ .



C'est un exemple de bifurcation type col-noeud : on passe de aucune position d'équilibre à deux positions d'équilibre avec une seule position d'équilibre au moment  $a = a_0$  de la transition. Ce genre de bifurcation est typique en dimension 1, comme l'indique le théorème suivant.

**Théorème 4.10** (Bifurcation de type col-noeud). Si  $\frac{dx}{dt} = f_a(x)$  est une famille d'EDO telle que :

1.  $G(x, a) := f_a(x)$  est une fonction de classe  $C^2$  ;
2.  $f_{a_0}(x_0) = 0$ ;
3.  $f'_{a_0}(x_0) = 0, f''_{a_0}(x_0) \neq 0$ ;
4.  $\frac{\partial f_{a_0}}{\partial a}(x_0) \neq 0$ .

Alors il y a une bifurcation de type col-noeud en  $a = a_0$ .

*Démonstration.* La fonction  $G$  est telle que  $G(x_0, a_0) = 0$  et  $\frac{\partial G}{\partial a}(x_0, a_0) \neq 0$ , donc par le théorème des fonctions implicites (Analyse III), il existe une fonction différentiable  $a = a(x)$  telle que  $G(x, a(x)) = 0$  près de  $x = x_0$ . En particulier,  $x^*$  est une position d'équilibre de l'équation  $\frac{dx}{dt} = f_{a(x^*)}(x)$ , puisque  $f_{a(x^*)}(x^*) = 0$ .

En différentiant l'équation  $G(x, a(x)) = 0$  par rapport à  $x$ , on a :

$$\frac{da}{dx} = \frac{-\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)}.$$

Or, par hypothèse,  $\frac{\partial G}{\partial a}(x_0, a_0) \neq 0$  et  $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, a_0) = f'_{a_0}(x_0) = 0$ , donc  $a'(x_0) = 0$ . En prenant une autre dérivée, on a

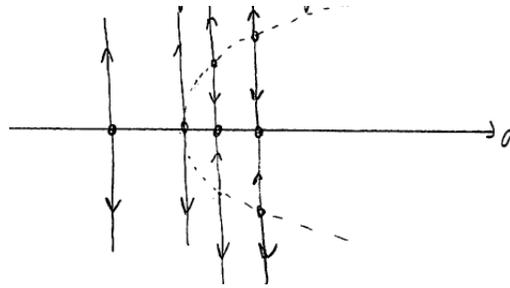
$$a''(x) = \frac{-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right) \frac{\partial G}{\partial a} + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial a}}{\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)^2}.$$

Comme  $\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)(x_0, a_0) = 0$ , on a donc que

$$a''(x_0) = \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, a_0)}{\frac{\partial G}{\partial a}(x_0, a_0)} \neq 0,$$

car  $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, a_0) = f''_{a_0}(x_0) \neq 0$ . Le graphe de  $a(x)$  est donc concave ou convexe près de  $x_0$ , donc l'équation  $x' = f_a(x)$  a deux positions d'équilibre pour des valeurs de  $a$  d'un côté de  $a_0$ , et aucune position d'équilibre pour des valeurs de  $a$  de l'autre côté de  $a_0$ . □

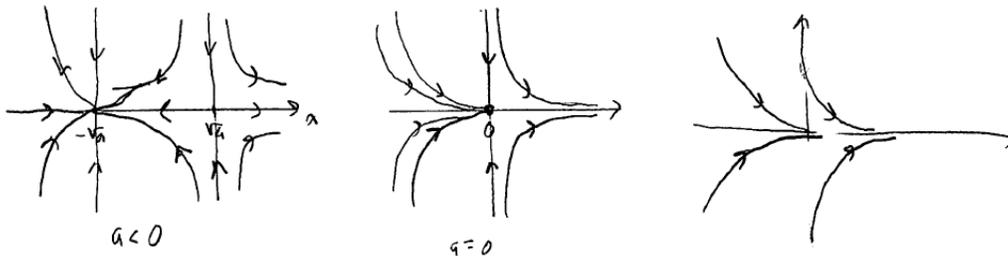
**Exemple 4.11.** (Bifurcation en forme de trident) On considère la famille d'équations  $\frac{dx}{dt} = x^3 - ax$ . Lorsque  $a > 0$ , il y a trois positions d'équilibre en  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{a}$  et  $x = -\sqrt{a}$ . Par contre, lorsque  $a \leq 0$ , la seule position d'équilibre est  $x = 0$ , ce qui donne le diagramme de bifurcation suivant :



**Exemple 4.12.** Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + a, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

Lorsque  $a = 0$ , il y a une seule position d'équilibre en  $(x, y) = (0, 0)$  et la linéarisation a une valeur propre nulle. On a en fait une bifurcation de type col-noeud, puisque pour  $a > 0$ , il n'y a aucune position d'équilibre alors que pour  $a < 0$ , il y a deux positions d'équilibre, à savoir sur un col et un noeud en  $(\sqrt{a}, 0)$  et  $(-\sqrt{a}, 0)$ , ce qu'on peut vérifier en utilisant le théorème de linéarisation :



**Exemple 4.13.** (Bifurcation de Hopf) On considère la famille de systèmes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + ay - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

L'origine est une position d'équilibre avec linéarisation :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

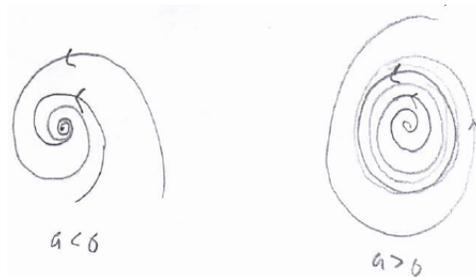
Les valeurs propres de cette linéarisation sont  $a \pm i$ , donc on s'attend à une bifurcation en  $a = 0$ . En coordonnées polaires, le système prend en fait une forme plus simple :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = ar - r^3, \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases}$$

Comme  $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ , l'origine est la seule position d'équilibre. Pour  $a < 0$ , on a un foyer stable, puisque

$$ar - r^3 = r(a - r^2) < 0 \quad \text{pour tout } r > 0.$$

Pour  $a > 0$ , l'origine devient un foyer instable. Comme  $\frac{dr}{dt} = 0$  lorsque  $r = \sqrt{a}$ , on a aussi une solution périodique de période  $2\pi$  lorsque  $r = \sqrt{a}$  tournant autour de l'origine. Or,  $\frac{dr}{dt} > 0$  pour  $r < \sqrt{a}$  et  $\frac{dr}{dt} < 0$  pour  $r > \sqrt{a}$ , donc les solutions (sauf la position d'équilibre) s'approchent de cette solution périodique lorsque  $t \rightarrow \infty$  :



On dit qu'il y a une bifurcation de Hopf : le nombre de positions d'équilibre reste inchangé, mais une solution périodique apparaît.

#### 4.4 Exercices

1. Trouver les positions d'équilibre et analyser leur stabilité pour les versions modifiées suivantes des équations de Volterra :

(a) Le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y\left(1 - \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

pour  $x > 0$  et  $y \geq 0$ .

(b) Le système

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{axy}{x+1} \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y)\end{aligned}$$

pour  $a > 0$ ,  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .

(c) Le système

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{xy}{x+b} \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y)\end{aligned}$$

pour  $b > 0$ ,  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .

2. Pour les équations de Volterra modifiées

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - by - \lambda x), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + dx - \mu y),\end{aligned}$$

montrer, lorsque  $\frac{c}{d} < \frac{a}{\lambda}$  que la position d'équilibre  $(x_0, y_0)$  avec  $x_0 > 0$  et  $y_0 > 0$  est asymptotiquement stable.

3. On considère le système

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(2 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(3 - 2x - y)\end{aligned}$$

modélisant l'évolution des populations de deux espèces en compétition pour les mêmes ressources.

- Dans l'espace des phases, tracer les isoclines verticales et horizontales de ce système, la direction du champ de vecteurs du système le long de ces dernières ainsi que dans les zones qu'elles découpent.
- Déterminer quelles sont les positions d'équilibre du système, leur stabilité et leur nature.
- Tracer un portrait des trajectoires du système dans l'espace des phases.
- à terme, s'attend-on en général à ce que les deux espèces réussissent à coexister ?

4. On considère le système

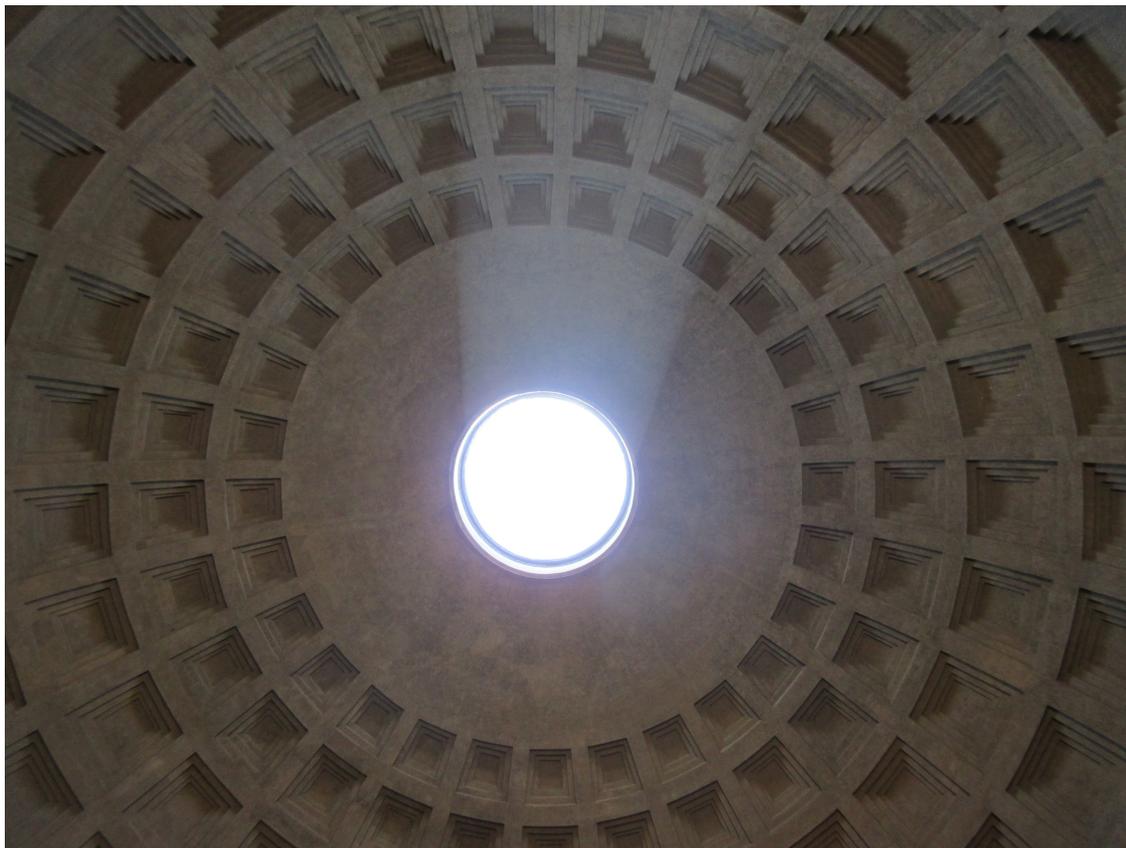
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2 + y \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + a\end{aligned}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est un paramètre.

- Pour chaque valeur du paramètre  $a$ , trouver toutes les positions d'équilibre.

- (b) Lorsque possible, utiliser le théorème de linéarisation pour étudier la stabilité de ces positions d'équilibre.
- (c) Décrire toutes les bifurcations qui se produisent lorsque le paramètre  $a$  varie.

## 5 Orbites fermées



Une orbite fermée du flot d'un champ de vecteurs est la trajectoire d'une solution périodique qui ne correspond pas à une position d'équilibre. L'existence d'une orbite fermée est une propriété globale du flot. Dans ce chapitre, nous allons étudier les orbites fermées pour les flots de champs de vecteurs en deux dimensions. Le résultat principal, à savoir le théorème de Poincaré-Bendixon, donne un critère d'existence en termes de la notion d'ensemble limite.

### 5.1 Ensembles limites

La notion d'ensemble limite permet de caractériser partiellement le comportement d'une trajectoire lorsque  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ .

**Définition 5.1.** *Un point  $\vec{y}$  est un point  $\omega$ -limite d'une solution  $\vec{x}(t)$  avec  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$  d'un système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow \infty$  de temps telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}(t_n) = \vec{y}$$

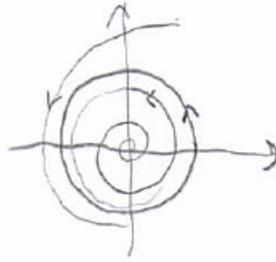
*L'ensemble de tous les points  $\omega$ -limites de la trajectoire  $\vec{x}(t)$  est dénotée  $\omega(\vec{x}_0)$  et s'appelle l'ensemble  $\omega$ -limite*

de  $\vec{x}_0$ . Similairement, un point  $\alpha$ -limite de  $\vec{x}_0$  est un point  $\vec{y}$  telle qu'il existe une suite  $t_n \rightarrow -\infty$  avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \vec{x}(t_n) = \vec{y}.$$

L'ensemble des points  $\alpha$ -limites de  $x_0$  est dénoté par  $\alpha(\vec{x}_0)$  et s'appelle l'ensemble  $\alpha$ -limite de  $\vec{x}_0$ .

**Exemple 5.2.** On considère le système  $\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r - r^3, \\ \frac{d\theta}{dt} = 1, \end{cases}$



de l'Exemple 4.13 avec  $a = 1$ . Alors pour tout  $\vec{x}_0 \neq 0$ ,  $\omega(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x}| = 1\}$ . De plus, pour  $|\vec{x}_0| > 1$ ,  $\alpha(\vec{x}_0) = \emptyset$ , pour  $|\vec{x}_0| = 1$ ,  $\alpha(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x}| = 1\}$  et pour  $|\vec{x}_0| < 1$ ,  $\alpha(\vec{x}_0) = \{(0, 0)\}$ .

**Proposition 5.3.** Si  $\vec{x}, \vec{z}$  appartiennent à la même trajectoire, alors  $\omega(\vec{x}) = \omega(\vec{z})$  et  $\alpha(\vec{x}) = \alpha(\vec{z})$ .

*Démonstration.* Les ensembles  $\omega$ -limite et  $\alpha$ -limite ne dépendent que de la trajectoire, pas du point de départ. □

**Proposition 5.4.** Si  $D$  est fermé et que toute solution initialement dans  $D$  peut être prolongée indéfiniment vers l'avant dans  $D$ , alors  $\omega(\vec{x}) \subset D$  pour tout  $\vec{x} \in D$ .

*Démonstration.* Si  $\vec{x} \in D$  et  $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ , alors il existe une suite de temps  $t_n \rightarrow \infty$  telle que

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(\vec{x}) = \vec{y},$$

où  $\phi_t$  est le flot du système. Comme  $\phi_t(\vec{x}) \in D \forall t \geq 0$ ,  $\phi_{t_n}(\vec{x}) \in D$ . Comme  $D$  est fermé, on a donc que

$$\vec{y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(\vec{x}) \in D.$$

□

**Remarque 5.5.** Sous les hypothèses du théorème,  $\phi_t(D) \subset D$  pour tout  $t \geq 0$ . On dit que  $D$  est positivement invariant. De même, si  $\phi_t(D) \subset D \forall t \leq 0$ , on dit que  $D$  est négativement invariant (sous l'action du flot).

**Exercice 5.6.** Si  $D$  est fermé et négativement invariant, montrer que  $\alpha(\vec{x}) \subset D$  pour tout  $\vec{x} \in D$ .

**Corollaire 5.7.** Si  $D$  est fermé et invariant, alors  $\alpha(\vec{x}) \subset D$  et  $\omega(\vec{x}) \subset D$  pour tout  $\vec{x} \in D$ .

**Proposition 5.8.** *Un ensemble  $\omega$ -limite (resp. ensemble  $\alpha$ -limite) est invariant et fermé.*

*Démonstration.* Considérons l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(\vec{x})$ . Si  $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ , alors il existe une suite  $t_n \rightarrow \infty$  telle que

$$\vec{y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(\vec{x}).$$

Mais alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , par continuité des solutions,

$$\phi_t(\vec{y}) = \phi_t\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(\vec{x})\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_t(\phi_{t_n}(\vec{x})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t+t_n}(\vec{x}),$$

donc  $\phi_t(\vec{y}) \in \omega(\vec{x})$ . L'ensemble  $\omega(\vec{x})$  est donc bien invariant.

Pour montrer que  $\omega(\vec{x})$  est fermé, soit  $\{\vec{y}_n\} \subset \omega(\vec{x})$  avec  $\vec{y}_n \rightarrow \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ . Il faut montrer que  $\vec{u} \in \omega(\vec{x})$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|\vec{y}_n - \vec{u}| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Comme  $\vec{y}_n \in \omega(\vec{x})$ , il existe aussi  $t \geq 0$  tel que  $|\vec{y}_n - \phi_t(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Ainsi,

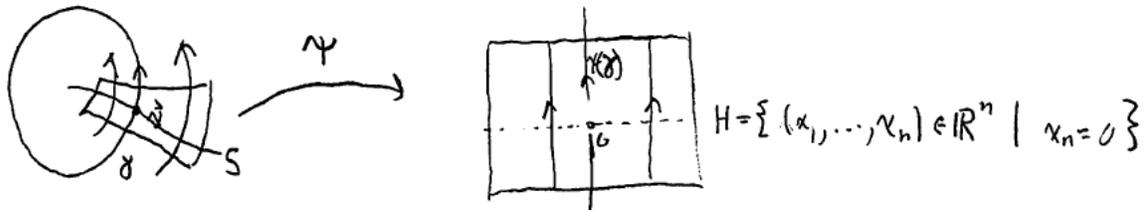
$$|\phi_t(\vec{x}) - \vec{u}| \leq |\phi_t(\vec{x}) - \vec{y}_n| + |\vec{y}_n - \vec{u}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  était quelconque et qu'on pouvait prendre  $t$  aussi grand qu'on veut, on voit bien que  $\vec{u} \in \omega(\vec{x})$ . □

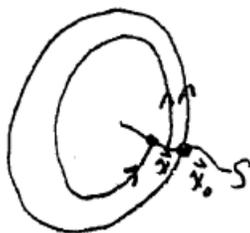
**Corollaire 5.9.** *Si  $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ , alors  $\omega(\vec{y}) \subset \omega(\vec{x})$  et  $\alpha(\vec{y}) \subset \omega(\vec{x})$ . Similairement, si  $\vec{y} \in \alpha(\vec{x})$ , alors  $\alpha(\vec{y}) \subset \alpha(\vec{x})$  et  $\omega(\vec{y}) \subset \alpha(\vec{x})$ .*

## 5.2 L'application de Poincaré

Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  un système défini sur un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\vec{v}$  de classe  $C^2$ . Soit  $\gamma \in \mathcal{U}$  une orbite fermée. Alors  $\vec{v}$  est tangent à  $\gamma$  et non-nul le long de  $\gamma$ . Pour  $\vec{x}_0 \in \gamma$ , on peut donc appliquer le théorème de redressement de champs de vecteurs (Théorème 2.30), c'est-à-dire qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\vec{x}_0$  et un difféomorphisme  $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $\psi(\vec{x}_0) = \vec{0}$  et  $d\psi(\vec{v}) = e_n = (0, \dots, 0, 1)$  :



Pour  $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ , on dit alors que  $S := \psi^{-1}(H)$  est une section locale du flot en  $\vec{x}_0$ , puisque chaque trajectoire passant près de  $\vec{x}_0$  passe à travers  $S$ . En particulier, par la dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales, pour  $\vec{x} \in S$  assez près de  $\vec{x}_0$ ,  $\phi_t(\vec{x})$  traversera à nouveau  $S$  pour un certain  $T > 0$  dépendant de  $\vec{x}$  :



**Définition 5.10.** *L'application de Poincaré est l'application  $P$  qui à  $\vec{x} \in S$  assez près de  $x_0$  associe  $P(\vec{x}) := \phi_T(\vec{x})$  avec  $T > 0$  le plus petit temps tel que  $\phi_T(\vec{x}) \in S$ . Donc*

$$P : \mathcal{S} \rightarrow S$$

avec  $\mathcal{S} \subset S$  un voisinage ouvert petit de  $\vec{x}_0 \in S$ .

**Remarque 5.11.** *Pour définir l'application de Poincaré,  $S$  peut aussi être un hyperplan passant par  $\vec{x}_0$  et transverse à l'orbite  $\gamma$ .*

Dans le cas d'un système plan ( $n = 2$ ), on peut prendre  $S$  une droite passant par  $\vec{x}_0$  et transverse (i.e. pas tangente) à  $\gamma$  en  $x_0$ . En ce sens,  $S$  peut être vu comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  avec  $\vec{x}_0$  identifié avec l'origine  $O$  et  $P$  peut être vue comme une application envoyant  $O$  sur  $O$ .

**Proposition 5.12.** *Dans le cas d'un système plan, si  $|P'(0)| < 1$ , alors l'orbite fermée  $\gamma$  est asymptotiquement stable, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert  $\mathcal{W}$  contenant  $\gamma$  tel que pour tout  $\vec{x} \in \mathcal{W}$ ,  $\omega(\vec{x}) \subset \gamma$ .*

*Démonstration.* Puisque  $|P'(0)| < 1$ ,  $P(x) = ax + O(x^2)$  avec  $|a| < 1$ , donc pour  $x$  assez petit,  $|P(x)| < |x|$ . Cela signifie qu'après un tour,  $\phi_t(x)$  s'est approché de  $\gamma$ . En fait, pour  $|x|$  assez petit, on peut supposer que  $|P(x)| < (|a| + \varepsilon)|x|$  avec  $|a| + \varepsilon < 1$ .

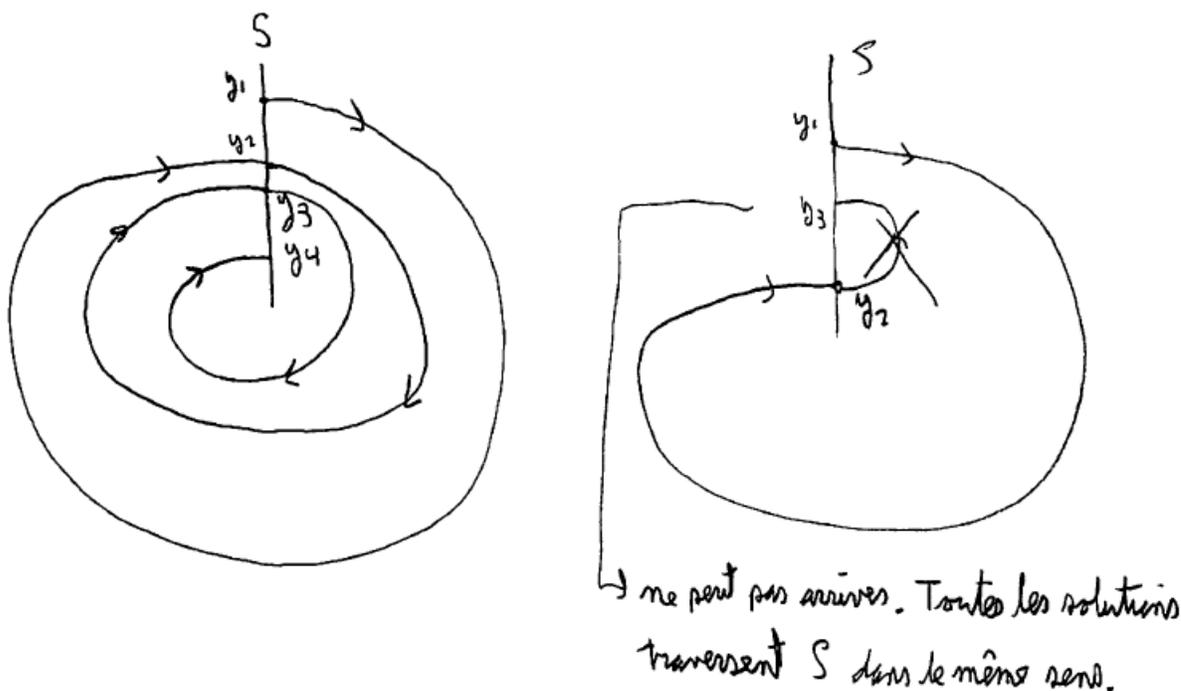
En itérant, on peut donc s'approcher aussi près que voulu de  $\gamma$ . Donc pour  $\vec{x}$  assez près de  $\gamma$ ,  $\phi_t(\vec{x})$  s'approche de  $\gamma$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

□

En pratique, il faut déjà avoir une description détaillée des solutions du système pour calculer l'application de Poincaré. C'est plus un outil d'intérêt conceptuel que pratique.

**Proposition 5.13.** *Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  un système plan et  $\gamma$  une orbite fermée. Soit  $S$  une section locale du flot passant par  $\vec{x}_0 \in \gamma$ . Soit  $\{y_n\}$  une suite de points distincts de  $S$  appartenant à la même trajectoire. Si  $y_n = \phi_{t_n}(y_0)$  avec  $\{t_n\}$  une suite monotone, alors  $\{y_n\}$  est monotone le long de  $S$ .*

*Démonstration.* Preuve par un dessin :



□

**Proposition 5.14.** Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  un système plan. Soit  $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$  un point- $\omega$  limite de  $\vec{x}$ . Alors la solution passant par  $\vec{y}$  traverse toute section locale en au plus un point. Le même résultat est valable si  $\vec{y} \in \alpha(\vec{x})$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$  et que  $\phi_t(\vec{y})$  croise une section locale  $S$  en deux points distincts  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$ . Alors par la Proposition 5.8,  $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \omega(\vec{x})$ . La solution  $\phi_t(\vec{x})$  passe donc près de  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$  une infinité de fois. On peut donc trouver une suite  $\{t_n\}$  croissante avec  $t_n \rightarrow \infty$  telle que  $\phi_{t_n}(\vec{x}) \in S$  est de plus en plus près de  $\vec{y}_1$  pour  $n$  impair et de plus en plus près de  $\vec{y}_2$  pour  $n$  pair. Comme  $\{\phi_{t_n}(\vec{x})\}$  alterne entre des points près de  $\vec{y}_1$  et près de  $\vec{y}_2$ , ce n'est pas une suite monotone sur  $S$ , contredisant le résultat précédent. Pour éviter une contradiction, il faut donc admettre que  $\phi_t(\vec{y})$  ne croise  $S$  qu'en au plus un point.

□

### 5.3 Théorème de Poincaré-Bendixon

On peut maintenant formuler le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 5.15 (Poincaré-Bendixon).** Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  un système plan avec  $\vec{v}$  de classe  $C^2$ . Si  $\Omega$  est un ensemble limite (i.e. de la forme  $\omega(\vec{x})$  ou  $\alpha(\vec{x})$  pour un certain  $\vec{x}$ ) non-vide, fermé (automatique par la Proposition 5.8) et borné ne contenant aucune position d'équilibre, alors  $\Omega$  est une orbite fermée.

Avant de démontrer ce théorème, voyons quelques implications.

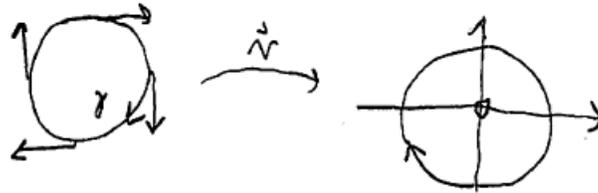
**Définition 5.16.** Un cycle limite est une orbite fermée  $\gamma$  telle que  $\gamma \subset \omega(\vec{x})$  ou  $\gamma \subset \alpha(\vec{x})$  pour un certain  $\vec{x} \notin \alpha$ .

**Corollaire 5.17.** Soit  $K$  un ensemble borné et fermé qui est positivement invariant ou négativement invariant. Alors  $K$  contient une position d'équilibre ou une orbite fermée.

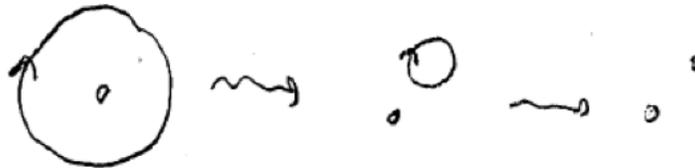
*Démonstration.* Supposons que  $K$  est positivement invariant. Alors pour  $\vec{x} \in K$ ,  $\omega(\vec{x}) \subset K$ , donc  $\omega(\vec{x})$  est borné. Si  $K$  ne contient aucune position d'équilibre, alors  $\omega(\vec{x})$  est une orbite fermée par le théorème de Poincaré-Bendixon, d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire 5.18.** Soit  $\gamma$  une orbite fermée bordant un ouvert  $\mathcal{V}$  dans le plan. Alors  $\mathcal{V}$  contient une position d'équilibre.

*Démonstration.* La restriction de  $\vec{v}$  à  $\gamma$  induit une application continue  $\vec{v} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  faisant un tour complet autour de l'origine :



Si  $\vec{v}$  ne contenait pas de position d'équilibre, il serait possible en rétractant  $\gamma$  sur un point de déformer continûment cette application sans qu'elle passe par l'origine pour qu'elle prenne qu'une seule valeur, ce qui est absurde (voir [Arn88, § 36] pour plus de détails).

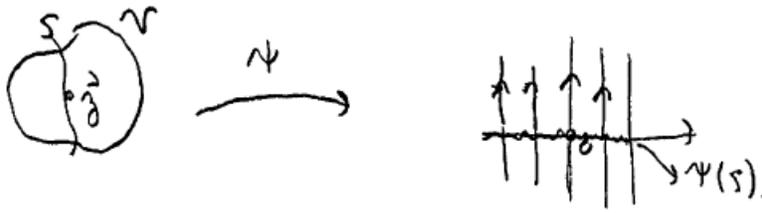


$\square$

*Démonstration du Théorème 5.15.* On suppose que  $\Omega = \omega(\vec{x})$  (le cas où  $\Omega = \alpha(\vec{x})$  est similaire). Soit  $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ . Montrons dans un premier temps que  $\vec{y}$  est contenu dans une orbite fermée de  $\gamma$ . On montrera ensuite que  $\Omega = \gamma$ .

Comme  $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ , on sait que  $\omega(\vec{y}) \subset \omega(\vec{x})$  par la Proposition 5.8. De plus, comme  $\omega(\vec{x})$  est invariant, borné et fermé, on peut extraire une sous-suite  $\phi_n(\vec{y})$  qui converge dans  $\omega(\vec{x})$ , donc  $\omega(\vec{y})$  n'est pas vide.

Soit  $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$ . Par hypothèse, il n'y a pas de position d'équilibre dans  $\omega(\vec{x})$ , donc  $\vec{v}(\vec{z}) \neq 0$ . Soit  $S$  une section locale du flot en  $\vec{z}$  et  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $\vec{z}$  où le champ de vecteurs  $\vec{v}$  peut être redressé :

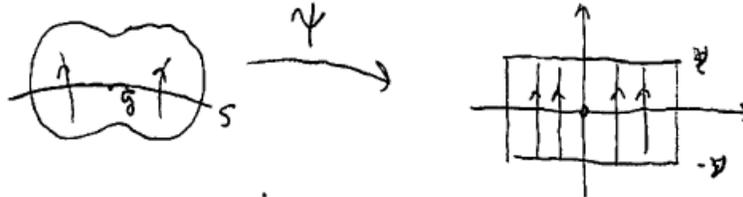


Par la Proposition 5.14, la trajectoire passant par  $\vec{y}$  coupe  $S$  une seule fois. Or, comme  $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$ , il existe une suite croissante  $\{t_n\}$  telle que  $\phi_{t_n}(\vec{y}) \rightarrow \vec{z}$ . En particulier, une infinité de ces points appartient à  $V$ . On peut donc trouver  $r, s \in \mathbb{R}$  avec  $r > s$  et  $\phi_r(\vec{y}), \phi_s(\vec{y}) \in S$ . Il s'ensuit que  $\phi_r(\vec{y}) = \phi_s(\vec{y})$ , donc que  $\phi_{r-s}(\vec{y}) = \vec{y}$  et  $r > s$ . Comme  $\omega(\vec{x})$  ne contient aucune position d'équilibre, il faut donc que  $\vec{y}$  soit contenu dans une orbite fermée  $\gamma \subset \omega(\vec{x})$ .

Il reste à montrer que  $\gamma = \omega(\vec{x})$ . Pour ce faire, il suffit de montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(\vec{x}), \gamma) = 0$$

où  $d(\phi_t(\vec{x}), \gamma)$  est la distance entre  $\phi_t(\vec{x})$  et  $\gamma$ . Soit  $S$  une section locale du flot en  $\vec{y} \in \gamma$ . Soit  $\nu > 0$  donné et considérons un voisinage  $\mathcal{V}_\nu$  assez petit où  $\vec{v}$  peut être redressé de sorte que  $\phi_t(\mathcal{V}_\nu \cap S) \subset \mathcal{V}_\nu$   $\forall t \in (-\nu, \nu)$  :



Alors il existe une suite croissante  $\{t_n\}$  telle que :

1.  $\phi_{t_n}(\vec{x}) \in S$ ;
2.  $\phi_{t_n}(\vec{x}) \rightarrow \vec{y}$ ;
3.  $\phi_{t_n}(\vec{x}) \notin S$  pour  $t_{n-1} < t < t_n$ ,  $n \geq 2$ .

Posons  $\vec{x}_n := \phi_{t_n}(\vec{x})$ . Par la Proposition 5.13,  $\{\vec{x}_n\}$  est une suite monotone sur  $S$  convergent vers  $\vec{y}$ . Montrons que la suite  $t_{n+1} - t_n$  est bornée supérieurement. Comme  $\vec{y} \in \gamma$ , il existe  $\tau > 0$  tel que  $\phi_\tau(\vec{y}) = \vec{y}$ . Pour  $\vec{x}_n$  suffisamment près de  $\vec{y}$ ,  $\phi_\tau(\vec{x}_n) \in \mathcal{V}_\nu$ , et donc  $\phi_{\tau+t}(\vec{x}_n) \in S$  pour un certain  $t \in ]-\nu, \nu[$ . On a donc que :

$$t_{n+1} - t_n \leq \tau + \nu,$$

ce qui donne la borne voulue (possiblement plus grande). Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  donné. Par continuité de la solution par rapport aux conditions initiales, il existe  $\delta > 0$  tel que si  $|\vec{z} - \vec{y}| < \delta$  et  $|t| < \tau + \nu$ , alors

$$|\phi_t(\vec{z}) - \phi_t(\vec{y})| < \varepsilon$$

Soit alors  $N \in \mathbb{N}$  assez grand de sorte que  $|\vec{x}_n - \vec{y}| < \delta$  pour  $n \geq N$ , ce qui implique que  $|\phi_t(\vec{x}_n) - \phi_t(\vec{y})| < \varepsilon$  pour  $|t| < \tau + \nu$ . Soit alors  $t \geq t_N$ . Soit  $n \geq N$  tel que  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . Alors

$$d(\phi_t(\vec{x}), \gamma) \leq |\phi_t(\vec{x}) - \phi_{t-t_n}(\vec{y})| = |\phi_{t-t_n}(\vec{x}_n) - \phi_{t-t_n}(\vec{y})| < \varepsilon, \text{ puisque } |t - t_n| < \tau + \nu.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  était quelconque, cela montre que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(\vec{x}), \gamma) = 0.$$

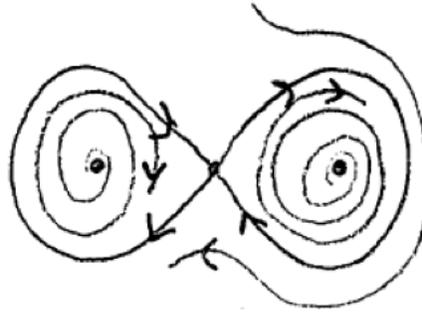
□

**Exemple 5.19.** Lorsque l'ensemble limite contient des positions d'équilibre, il peut être plus compliqué.

Pour le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)(x^3 - x), \\ \frac{dy}{dt} = x^3 - x - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)y, \end{cases}$$

les positions d'équilibre sont en  $(0, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ , respectivement un col et deux foyers instables.



Les solutions loin de l'origine s'accablent autour des deux homoclines (i.e. une trajectoire émanant d'une position d'équilibre et aboutissant à cette même position d'équilibre), chacune d'elles partant et retournant à l'origine. Les solutions émanant des foyers s'accablent autour de l'homocline correspondante et  $(0, 0)$ .

**Définition 5.20.** Un cycle limite est une orbite fermée  $\gamma$  telle que  $\gamma \subset \omega(\vec{x})$  ou  $\gamma \subset \alpha(\vec{x})$  pour un certain  $\vec{x} \notin \gamma$ . Dans le premier cas, c'est un cycle  $\omega$ -limite, dans le second, un cycle  $\alpha$ -limite.

**Remarque 5.21.** Une orbite fermée n'est pas automatiquement un cycle limite, e.g. les orbites fermées du pendule sans friction. Pour être un cycle limite, il faut qu'il y ait une trajectoire qui s'enroule autour de  $\gamma$ .

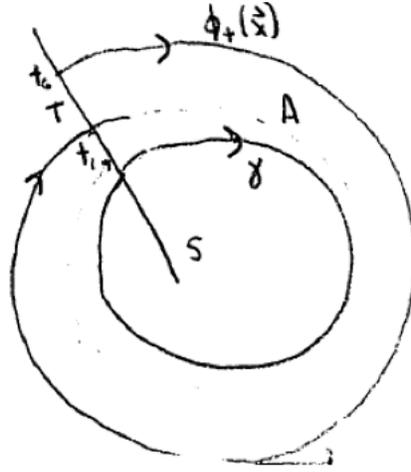
En fait, dès qu'il y a une trajectoire qui s'enroule autour de  $\gamma$ , il y en a une infinité comme le montre le résultat suivant.

**Théorème 5.22.** Soit  $\gamma$  un cycle- $\omega$  limite. Si  $\gamma = \omega(\vec{x})$  avec  $\vec{x} \notin \gamma$ , alors il existe un voisinage ouvert de  $\mathcal{V}$  de  $\vec{x}$  tel que  $\gamma = \omega(\vec{y})$  dès que  $\vec{y} \in \mathcal{V}$ . Autrement dit, l'ensemble  $\{\vec{y} \mid \omega(\vec{y}) = \gamma\} \setminus \gamma$  est ouvert.

*Démonstration.* Soit  $\vec{z} \in \gamma$  et considérons une section locale  $S$  du flot en  $\vec{z}$ . Par la preuve du théorème de Poincaré-Bendixon, on sait que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(\vec{x}), \gamma) = 0$$

et que pour  $t \gg 0$ ,  $\phi_t(\vec{x})$  tourne autour de  $\gamma$  et coupe  $S$  une infinité de fois. Soit  $T \subset S$  un intervalle disjoint de  $\gamma$  entre  $\phi_{t_0}(\vec{x})$  et  $\phi_{t_1}(\vec{x})$  avec  $t_0 < t_1$  tel qu'illustré :



Clairement, la région  $A$  délimitée par  $\gamma, T$  et la trajectoire  $\{\phi_t(\vec{x}) | t_0 \leq t \leq t_1\}$  est positivement invariante, de même que  $B := A \setminus \gamma$ . En itérant, on voit que pour tout  $\vec{y} \in B, \omega(\vec{y}) = \gamma$ .  $\square$

**Corollaire 5.23.** *S'il existe une fonction  $H$  continue sur l'espace des phases qui est constante le long des trajectoires, mais qui n'est pas constante sur tout ouvert, alors le système n'a pas de cycle limite.*

*Démonstration.* Supposons pour une contradiction que  $\gamma$  est un cycle limite. Soit  $c$  la valeur de  $H$  sur ce cycle. Soit  $\vec{x} \notin \gamma$  tel que  $\omega(\vec{x}) = \gamma$ . Par continuité de  $H$ ,  $H = c$  sur la trajectoire passant par  $\vec{x}$ . Par le résultat précédent,  $H = c$  sur un ouvert, contredisant nos hypothèses. Il faut donc admettre qu'il n'y a aucun cycle limite.  $\square$

## 5.4 Les équations de Van Der Pol et de Liénard

L'équation de Liénard est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (30)$$

avec les hypothèses suivantes sur les fonctions  $f$  et  $g$  :

1.  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^2$  ;
2.  $g$  est une fonction impaire avec  $g(x) > 0$  pour  $x > 0$  ;
3.  $f$  est une fonction paire.

**Exemple 5.24.** *Si  $f(x) = \gamma > 0$  et  $g(x) = kx$  avec  $k > 0$ , c'est un oscillateur harmonique avec friction. L'équation correspond aussi à l'équation du courant dans un circuit RLC. En posant  $y = \frac{dx}{dt}$ , l'équation peut être mise sous la forme d'un système plan :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y. \end{cases}$$

Clairement, puisque  $g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ , la seule position est en  $(0, 0)$ . La linéarisation correspondante est

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbb{A}\vec{x} \text{ avec } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & f(0) \end{pmatrix}, \quad \det \mathbb{A} = g'(0) \geq 0, \quad \text{Tr } \mathbb{A} = -f(0).$$

Si  $g'(0) > 0$  et  $f(0) > 0$ , la position d'équilibre est donc topologiquement localement équivalente à un noeud stable.

Pour l'équation de Liénard, on se met plutôt dans le cadre opposé en supposant que :

4. La fonction impaire  $F(x) := \int_0^x f(u)du$  a exactement un zéro strictement positif en  $x = a$ , est strictement négative pour  $0 < x < a$ , et strictement positive et croissante pour  $x > a$  avec  $F(x) \rightarrow \infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

Dans ce cas,  $f(0) \leq 0$ . Si on suppose qu'en fait  $g'(0) > 0$  et  $f(0) < 0$  (hypothèse 5), alors par le théorème de linéarisation, la position d'équilibre est localement topologiquement équivalente à un noeud instable.

**Question 5.25.** *Y a-t-il des orbites fermées ?*

Par le Corollaire 5.18, les orbites fermées entourent une région contenant une position d'équilibre. Les orbites fermées, s'il y en a, doivent donc tourner autour de l'origine.

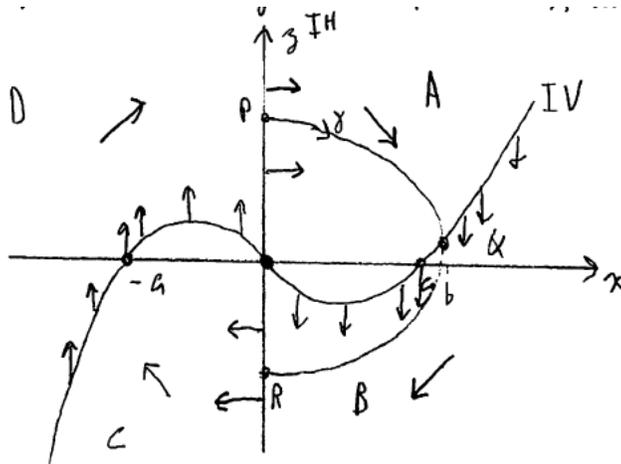
Pour étudier cette question, on peut faire le changement de variable  $x = x, z = y + F(x)$ , de sorte que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt} + F'(x)\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + f(x)y = (-g(x) - f(x)y) + f(x)y = -g(x).$$

En termes de  $x, z$ , le système devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - F(x) \\ \frac{dz}{dt} = -g(x). \end{cases} \quad (31)$$

**Exemple 5.26.** Lorsque  $g(x) = x$  et  $F(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$  avec  $a = 1$ , le système correspond aux équations de Van Der Pol, initialement étudiées pour modéliser un circuit RLC avec une résistance non linéaire. En termes de  $(x, y)$ , l'origine est à nouveau la seule position d'équilibre. L'isocline verticale correspond au graphe de  $F$ , alors que l'isocline horizontale correspond à l'axe des  $z$  :



L'avantage de la présentation (31) est qu'elle met en lumière une symétrie du système. Si  $(x(t), z(t))$  est une solution, alors  $(-x(t), -z(t))$  est aussi une solution, puisque  $F$  et  $g$  sont des fonctions impaires. On peut donc se concentrer sur les régions A et B pour comprendre ce qui se passe.

**Exercice 5.27.** Sauf pour la position d'équilibre, montrer que toutes les trajectoires de la zone A vont vers la zone B et toutes les trajectoires de la zone B vont vers la zone C.

Par symétrie, les trajectoires tournent donc autour de l'origine (qui est donc un foyer instable). Soit  $\gamma$  la trajectoire débutant en  $p = (0, z)$  avec  $z > 0$ . Soient  $Q, R$  les points où cette trajectoire coupe pour la première fois l'isocline verticale et l'axe des  $z$  négatif. Par la symétrie du système, cette trajectoire sera fermée si et seulement si  $\overline{OP} = \overline{OR}$ .

**Théorème 5.28.** Le système possède une unique orbite fermée.

*Démonstration.* Soit  $b > 0$ , tel que  $Q = (b, q)$ . Il faut montrer qu'il existe un unique  $b > 0$  tel que  $\overline{OP} = \overline{OR}$ . Considérons la fonction :

$$H(x, z) = \frac{z^2}{2} + G(x) \text{ avec } G(x) := \int_0^x g(u) du.$$

Alors le long d'une trajectoire, on a que

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= g(x) \frac{dx}{dt} + z \frac{dz}{dt} \\ &= \left(-\frac{dz}{dt}\right)(z - F(x)) + z \frac{dz}{dt} \\ &= F(x) \frac{dz}{dt}, \end{aligned}$$

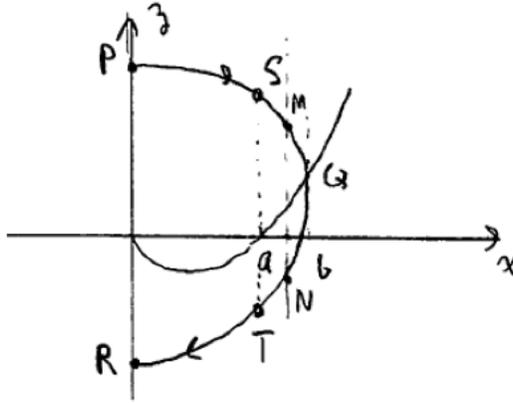
donc  $dH = F(x)dz$  le long du flot. Posons

$$I(b) = \int_{PR} F dz = \int_{PR} dH = H(R) - H(P) = \frac{1}{2}(\overline{OR}^2 - \overline{OP}^2).$$

Alors il faut montrer qu'il existe un unique  $b > 0$  tel que  $I(b) = 0$ .

Si  $b \leq a$ , alors  $F(x) < 0$  et  $z$  décroît le long de la trajectoire, donc  $I(b) > 0$ . Supposons donc que  $b > a$  et décomposons  $I(b)$  comme suit :

$$I(b) = I_1(b) + I_2(b), \quad I_1(b) = \int_{PS} Fdz + \int_{TR} Fdz, \quad I_2(b) = \int_{ST} Fdz.$$



Comme pour le cas  $b \leq a$ ,  $I_1(b) > 0$ . Entre S et T,  $F \geq 0$  et  $z$  décroît, donc  $I_2(b) < 0$ . Montrons que  $I(b)$  est une fonction décroissante en  $b$ . En écrivant

$$Fdz = F \frac{dz}{dx} dx = \frac{-g(x)F(x)}{z - F(x)} dx,$$

on voit que

$$I_1(b) = \int_0^a \frac{-g(x)F(x)}{z - F(x)} dx$$

et si  $b$  augmente,  $z$  augmente, alors que  $F < 0$  et  $g > 0$  dans cette région, donc  $I_1(b)$  décroît bien. D'autre part, comme  $F > 0$  entre S et T et que  $F$  est croissante pour  $x > a$ , on a que  $I_2(b)$  décroît aussi strictement. De plus, pour  $M$  et  $N$  tels qu'indiqués dans la figure,

$$I_2(b) = \int_{ST} Fdz < \int_{MN} Fdz < -F(a)\overline{MN} \rightarrow -\infty \quad \text{lorsque } b \rightarrow +\infty$$

pour  $b > c > a$ .

Par le théorème des valeurs intermédiaires et puisque  $I$  est strictement croissante, il existe donc un unique  $b > a$  tel que  $I(b) = 0$ , donc une unique orbite fermée. □

## 5.5 Exercices

1. Montrer qu'un système admettant une fonction de Liapounov stricte ne possède pas d'orbites fermées.

2. Soit  $\vec{x}$  un point positivement récurrent d'un système plan, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante  $\{t_n\}$  telle que  $\phi_{t_n}(\vec{x}) \rightarrow \vec{x}$ . Montrer que soit  $\vec{x}$  est une position d'équilibre, soit  $\vec{x}$  est contenu dans une orbite fermée.
3. Soit  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$  un système plan avec  $\vec{v}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  ayant un nombre fini de positions d'équilibre. Soient  $\Omega$  un ensemble limite borné et  $\vec{y} \in \Omega$  un point tel que  $\vec{v}(\vec{y}) \neq 0$ . Si  $\vec{y}$  n'est pas contenu dans une orbite fermée, montrer qu'il existe des positions d'équilibre  $y_-, y_+ \in \Omega$  telles que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi_t(\vec{y}) = y_{\pm}.$$

*Indice : Utiliser la compacité de  $\Omega$  et le fait que la trajectoire passant par  $\vec{y}$  coupe toute section locale du flot en au plus un point.*

4. On considère le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) (x^3 - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 - x - \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) y. \end{aligned}$$

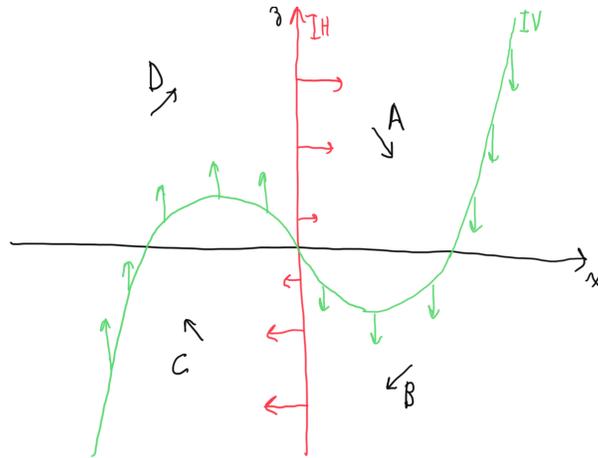
- (a) Montrer que  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$  sont des positions d'équilibre.
- (b) Dans chaque cas, déterminer leur nature et leur stabilité.
5. (**Défi**) Montrer qu'un ensemble limite borné est forcément connexe.
6. On considère le système  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  sur un ouvert  $\mathcal{U}$  de l'espace des phases élargi  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Montrer que le théorème d'existence, d'unicité et de continuité par rapport aux conditions initiales reste valide si on suppose seulement que  $\vec{v}$  est continue sur  $\mathcal{U}$  et qu'il existe une constante  $L$  telle que

$$|\vec{v}(\vec{x}_1, t) - \vec{v}(\vec{x}_2, t)| \leq L|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \quad \forall (\vec{x}_1, t), (\vec{x}_2, t) \in \mathcal{U}.$$

7. On considère le système des équations de Liénard

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z - F(x), \\ \frac{dz}{dt} &= -g(x), \end{aligned}$$

avec  $F$  et  $g$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que  $g(x)$  est une fonction impaire avec  $g(x) > 0$  pour  $x > 0$  et  $F(x)$  est une fonction impaire ayant un seul zéro strictement positif en  $x = a > 0$ . On suppose aussi que  $F$  est strictement négative pour  $x \in (0, a)$ , alors que pour  $x \in (a, \infty)$ , elle est strictement positive et croissante avec  $F(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . On suppose enfin que  $g'(0) > 0$  et que  $F'(0) < 0$ . Les isoclines verticales et horizontales décomposent alors l'espace des phases en quatre régions  $A, B, C$  et  $D$  tel qu'illustré :



- (a) Hormis pour la position d'équilibre, montrer de deux manières qu'une trajectoire débutant dans la zone  $A$  doit éventuellement couper l'isocline verticale pour se retrouver dans la zone  $B$  :
- En montrant que le long d'une telle trajectoire, il existe  $\tau > 0$  et  $c > 0$  tels que  $\frac{dz}{dt} < -c$  dès que  $t \geq \tau$  ;
  - En utilisant le théorème de Poincaré-Bendixon et le fait qu'une orbite fermée du système doit forcément tourner autour de l'origine (la seule position d'équilibre).
- (b) Hormis pour la position d'équilibre, montrer qu'une trajectoire débutant dans la zone  $B$  doit éventuellement couper l'isocline horizontale pour se retrouver dans la zone  $C$ . *Indice : Montrer qu'il existe  $\tau > 0$  et  $c > 0$  tels que  $\frac{dx}{dt} < -c$  dès que  $t \geq \tau$ .*
- (c) On a vu en classe que le système possède une seule orbite fermée  $\gamma$ . Utiliser le théorème de Poincaré-Bendixon pour montrer que  $\gamma = \omega(x, z)$  pour tout  $(x, z) \neq (0, 0)$ .

8. On considère le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= (1 - x^4)y - x. \end{aligned}$$

- Montrer que  $(0, 0)$  est la seule position d'équilibre. Peut-on utiliser le théorème de linéarisation pour déterminer sa nature et sa stabilité ?
- Dans l'espace des phases, tracer les isoclines verticales et horizontales de ce système, la direction du champ de vecteurs du système le long de ces dernières ainsi que dans les zones qu'elles découpent.
- Si  $(x(t), y(t))$  est une solution, montrer que  $(-x(t), -y(t))$  est aussi une solution.
- Hormis la position d'équilibre, montrer que toutes les solutions tournent éventuellement autour de l'origine dans le sens horaire.
- Montrer que la fonction  $H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$  croît le long des solutions suffisamment près de l'origine.

- (f) Utiliser le théorème de Poincaré-Bendixon pour montrer que le système possède une orbite fermée tournant autour de l'origine.

## Références

- [Arn80] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie équations différentielles ordinaires*. Traduit du Russe : Mathématiques. “Mir”, Moscou, 1980. traduit du russe Djilali Embarek.
- [Arn88] V. Arnold. *Équations différentielles ordinaires*. Traduit du Russe : Mathématiques. “Mir”, Moscou, 1988. quatrième édition, traduit du russe Djilali Embarek.
- [HSD13] Morris W. Hirsch, Stephen Smale et Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third edition, 2013.
- [Sim17] George F. Simmons. *Differential equations with applications and historical notes*. CRC Press, 2017.