Devoir II

Dû le mercredi 30 novembre 2022

Il y a dix problèmes en tenant compte des sous-questions. Chaque problème vaut dix points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. On considère l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ muni de son produit hermitien canonique

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{v} \quad \text{pour } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n,$$

où $\overline{\mathbf{u}}$ signifie qu'on prend le conjugué complexe de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}^T$ dénote la transposée de $\mathbf{u}$. Une matrice $n \times n$ avec entrées complexes $\mathbf{U}$ est dite **unitaire** si elle préserve le produit hermitien, c'est-à-dire que

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \quad \langle \mathbf{U}\mathbf{u}, \mathbf{U}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Montrer qu'une matrice $\mathbf{U}$ est unitaire si et seulement si $\overline{\mathbf{U}}^T \mathbf{U} = \mathrm{Id}$ où Id est la matrice identité.

2. Calculer la transformée de Fourier de $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ en utilisant l'identité

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-x^2} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{i}{2}\xi)^2} dx$$

et en appliquant le théorème de Cauchy à un contour judicieusement choisi dans le plan complexe.

3. Déterminer la solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ \\ T(x,0) = e^{-\frac{x^2}{4\kappa}}, \qquad \text{(température initiale)} \end{cases} \tag{*}$$

en utilisant la transformée de Fourier.

4. La formule de de Broglie $\lambda = \dfrac{h}{p}$ suggère de considérer la transformée de Fourrier modifiée $\mathcal{F}_\hbar : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{F}_\hbar(\varphi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \varphi(x) dx.$$

(a) En faisant le changement de variable $\xi = \dfrac{p}{\hbar}$, montrer que

$$\mathcal{F}_\hbar(\varphi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathcal{F}(\varphi)(\frac{p}{\hbar}),$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier usuelle.

(b) En utilisant la formule pour $\mathcal{F}^{-1}$, montrer que l'inverse de $\mathcal{F}_\hbar$ est donné par

$$\mathcal{F}_\hbar^{-1}(\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}px}\psi(p)dp.$$

(c) Montrer que $\mathcal{F}_\hbar(-i\hbar\dfrac{d\varphi}{dx})(p) = p\mathcal{F}_\hbar(\varphi)(p)$, c'est-à-dire que l'opérateur $i\hbar\frac{d}{dx}$ correspond à la multiplication par p sous la transfomée $\mathcal{F}_\hbar$.

5. Un oscillateur harmonique bi-dimentionnel consiste en une particule qui subit une force décrite par le potentiel $U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, où r est la distance de la particule par rapport à l'origine, m dénote la masse de la particule et ω est une constante positive. En coordonnées polaires, l'énergie cinétique de la particule est donnée par $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$.

(a) Donner les équations d'Euler-Lagrange associées au lagrangien $L = T - U$ du système dans les coordonnées (r, θ).

(b) Calculer l'hamiltonien H en termes des coordonnées r, θ, $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$ et $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$.

(c) Donner les équations de Hamilton associées au hamiltonien du problème précédent.

(d) Y a-t-il des quantités qui sont conservées le long de la trajectoire physique de la particule ?