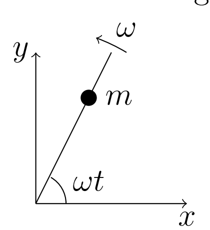
Examen final

Le lundi 23 avril 2018, 9h30 à 12h30 au PK-2205

Instructions : Il y a 5 problèmes. Chaque problème vaut 20 points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Aucune documentation n'est permise, sauf un aide-mémoire écrit à la main sur une feuille $8\frac{1}{2} \times 11$ recto-verso. Aucune calculatrice et aucun téléphone cellulaire ne sont autorisés.

1. Une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est telle que $-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$. Déterminer quelle est la transformée de Fourrier $\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx$ de f sachant que $\mathcal{F}(\dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}})(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

2. Une perle de masse m glisse sans frottement le long d'un fil rectiligne rigide tournant à une vitesse angulaire constante ω dans un plan tel qu'illustré :



Si r dénote la distance de la perle par rapport au centre de rotation du fil rectiligne, alors le lagrangien associé à ce système est donné par

$$L(r, \dot{r}, t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2).$$

(a) Quelles sont les équations d'Euler-Lagrange de ce système ?

(b) Si initialement $r(0) = r_0 > 0$ et $\dot{r}(0) = 0$, quelle est la trajectoire de la perle ?

3. Une particule est confinée à se déplacer dans le carré

$$\mathcal{Q} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq y \leq \ell\},$$

de sorte que son hamiltonien soit l'opérateur $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ et que sa fonction d'onde ψ s'annule sur le bord de $\mathcal{Q}$.

(a) Trouver toutes les valeurs propres $E \in \mathbb{R}$ telles qu'il existe ψ une fonction non-nulle de la forme $\psi(x, y) = \psi_1(x)\psi_2(y)$ s'annulant sur le bord $\mathcal{Q}$ telle que

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

(b) Si la particule a pour fonction d'onde $\psi(x,y) = \frac{2}{\ell}\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{\ell}\right)$ en $t = 0$, quelle est sa fonction d'onde pour $t > 0$.

4. Une molécule a pour fonction d'onde

$$\psi(\theta,\phi,0) = \frac{1}{\sqrt{29}}(2Y_2^2(\theta,\phi) + 3Y_5^3(\theta,\phi) + 4Y_7^7(\theta,\phi))$$

au temps $t = 0$.

(a) Si on mesure L^2 et L_z, quels résultats peut-on trouver, et avec quelles probabilités ?

(b) Déterminer $\psi(\theta,\phi,t)$ pour $t > 0$ si le hamiltonien est donné par $\hat{H} = \frac{L^2}{2I}$, où I est le moment d'inertie de la molécule.

(c) Si au temps $t = 0$, on mesure le moment cinétique L_z dans la composante z et qu'on obtient $2\hbar$, dans quel état se retrouve la molécule immédiatement après cette mesure ?

5. On considère un oscillateur harmonique de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ et de masse m. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on dénote par φ_n l'état propre (normalisé) du hamiltonien de valeur propre $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Si la fonction d'onde de l'oscillateur est donnée par

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}\varphi_0(x) + e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}\varphi_1(x)\right),$$

montrer que

$$\langle x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\cos\omega t \quad \text{où } \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

Indice : Utiliser le fait que $\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}\beta}$ *en termes des opérateurs de création et d'annihilation, ainsi que les identités*

$$\hat{a}\varphi_0 = 0, \quad \hat{a}\varphi_{n+1} = \sqrt{n+1}\varphi_n, \quad \hat{a}^\dagger\varphi_n = \sqrt{n+1}\varphi_{n+1}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$