Liste d'exercices I

Semaine du 12 septembre 2022

1. Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions bornées sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ respectivement. Peut-on conclure que la suite $\{f_ng_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg ?
2. Étudier la convergence uniforme des séries de fonctions suivantes :

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2},\ x\in\mathbb{R},\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{n^2}\right),\ x\in[0,1],\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n},\ x\in(1,\infty).$$

3. Déterminer quelle est la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x)=|x|$ pour $x\in[-\pi,\pi]$. En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.
4. Calculer les coefficients de la série de Fourier de la fonction $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\pi],\\ -1, & x\in[-\pi,0).\end{cases}$$

En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.