Liste d'exercices X

En lien avec la semaine du 28 novembre 2022

1. ([Lib98, problèmes 9.23,9.24,9.28]) Une particule se trouve dans un état $\psi_{m\ell}$ tel que

$$L^2\psi_{m\ell} = \ell(\ell+1)\hbar^2\psi_{m\ell}, \quad L_z\psi_{m\ell} = m\hbar\psi_{m\ell}.$$

   (a) Montrer que dans cet état, $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$.

   (b) Montrer qu'on a aussi $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \dfrac{\hbar^2}{2}(\ell(\ell+1) - m^2)$.

   (c) Quelle est la valeur moyenne de l'opérateur $\dfrac{1}{2}(L_xL_y + L_yL_x)$?

   (d) On mesure maintenant la composante de $\vec{L}$ dans la direction $\hat{n}$, où l'angle entre l'axe des z et $\hat{n}$ est α. Quelle est la valeur moyenne de cette composante. Quelle est la valeur moyenne du carré de cette composante.

2. On considère une particule de masse m contrainte de se déplacer sur une sphère de rayon r_0. Le hamiltonien de ce système est $\hat{H} = \frac{L^2}{2I}$ où $I = mr_0^2$ est le moment d'inertie de la particule.

   (a) Trouver les états propres et les valeurs propres pour ce système. Quelles sont les multiplicités des valeurs propres ?

   (b) Si la particule, qu'on suppose de charge q, est plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle à l'axe des z, son hamiltonien devient $\hat{H} = \hat{H}_0 + \omega_L L_z$ où $\omega_L = -\dfrac{qB}{2m}$. Quels sont les états propres et les valeurs propres du système dans ce cas. Quelles sont les multiplicités des valeurs propres.

3. ([Lib98, problème 9.25]) Une molécule a pour fonction d'onde

$$\psi(\theta,\phi,0) = \frac{1}{\sqrt{26}}(3Y_1^1(\theta,\phi) + 4Y_7^3(\theta,\phi) + Y_7^1(\theta,\phi))$$

   au temps $t = 0$.

   (a) Si on mesure L^2 et L_z, quels résultats peut-on trouver, et avec quelles probabilités ?

   (b) Déterminer $\psi(\theta,\phi,t)$ pour $t > 0$ si le hamiltonien est donné par $\hat{H} = \dfrac{L^2}{2I}$, où I est le moment d'inertie de la molécule.

   (c) Déterminer $\langle \hat{H} \rangle$ pour $t > 0$.

Références

[Lib98] Richard L. Liboff. *Introductory Quantum mechanics (third edition)*. Addison Wesley, 1998.