Liste d'exercices II

Semaine du 19 septembre 2022

Une corde de longueur L, tendue et maintenue fixe en ses deux extrémités vibre dans l'air. Dû à la friction de l'air, un nouveau terme s'ajoute à l'équation de la corde vibrante qui devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \ \forall t,$$

où $\gamma > 0$ est une constante telle que $\gamma < \frac{2\pi\alpha}{L}$.

1. Si $u \in \mathcal{C}^2([0,\ell] \times \mathbb{R})$ est une solution de cette équation telle que $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ pour tout t, montrer que la fonctionnelle d'énergie

$$E(u,t) := \frac{\rho}{2} \int_0^\ell \left((\partial_t u)^2 + \alpha^2 (\partial_x u)^2 \right) dx$$

   de cette solution décroît avec le temps, où ρ est la densité de masse de la corde.
2. Montrer qu'il y a au plus une solution dans $\mathcal{C}^2([0,\ell] \times \mathbb{R})$ lorsqu'initialement $u(x,0)$ et $\partial_t u(x,0)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ qui s'annulent aux extrémités de l'intervalle $[0,\ell]$.
3. Trouver toutes les solutions de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$ avec T de la forme $T(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$.
4. Énoncer et établir un théorème d'existence analogue à celui démontré en classe pour l'équation d'onde sans friction.
5. Quelle est la solution si initialement $u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$?
6. Quelle est la solution si on garde les mêmes conditions initiales, mais qu'on a plutôt que $\gamma > \frac{2\pi\alpha}{L}$?