Liste d'exercices III

Semaine du 26 septembre 2022

1. On considère l'équation d'onde $\partial_t^2 f = \kappa \Delta f$ sur le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ de rayon R avec condition au bord $f|_{\partial D} = 0$, où κ est une constante strictement positive et $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ est le laplacien sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que la fonctionnelle d'énergie
   $$E_f(t) = \frac{1}{2} \int_D \left((\partial_t f)^2 + \kappa |\nabla f|^2 \right) dxdy$$
   ne dépend pas du temps lorsque $f \in \mathcal{C}^2(D \times \mathbb{R})$ est une solution de l'équation d'onde (satisfaisant la condition au bord).
   (b) En conclure, lorsque les conditions initiales $f(x,y,0) = u(x,y)$ et $\partial_t f(x,y,0) = v(x,y)$ sont spécifiées avec $u, v \in \mathcal{C}^2(D)$ et $u|_{\partial D} = v|_{\partial D} = 0$, que l'équation d'onde a au plus une solution $f \in \mathcal{C}^2(D \times \mathbb{R})$ avec $f|_{\partial D \times \mathbb{R}} = 0$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on considère la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n
   $$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}.$$
   (a) Montrer que $\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $\frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}_0$.
   (c) Utiliser a) pour montrer que $J_n'(x) + \frac{n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Utiliser b) pour montrer que $J_n'(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = -J_{n+1}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}_0$.
3. Soit $u(x)$ une solution non triviale, périodique de période 2π, de l'équation $u''(x) = \lambda u(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que forcément $\lambda \in \mathbb{R}$ de deux façons :
   (a) directement ;
   (b) En utilisant le fait que le laplacien est formellement auto-adjoint pour le produit hermitien
   $$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u_1 \overline{u}_2 dx$$
   lorsqu'on considère des fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ qui sont périodiques de période 2π.