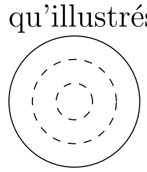
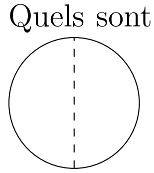
Liste d'exercices IV

Semaine du 10 octobre 2022

1. On considère l'équation d'onde $\partial_t^2 f = \kappa \Delta f$ sur le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq R\}$ de rayon R avec condition au bord $f|_{\partial D} = 0$, où κ est une constante strictement positive et $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ est le laplacien sur $\mathbb{R}^2$. Trouver l'unique solution à cette équation si initialement en coordonnées polaires, on a que
$$f(r,\theta,0) = J_0(\frac{\nu_{0,1} r}{R}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} f(r,\theta,0) = 0,$$
où $\nu_{0,1} \approx 2.4048$ est le plus petit zéro de J_0.

2. Sur le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ de rayon 1, on considère l'équation d'onde
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, & x \in [0,\ell], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u|_{\partial D} = 0, & \forall t \text{ (conditions au bords).} \end{cases} \tag{1}$$
Si $0 < \nu_{n,1} < \nu_{n,2} < \cdots < \nu_{n,k} < \cdots$ est la liste des points où la fonction de Bessel J_n s'annule sur $(0,\infty)$, on sait alors qu'en coordonnées polaires, la fonction
$$u_{n,k}(r,\theta,t) := J_n(\nu_{n,k} r)\cos(n\theta)\cos(\nu_{n,k} t)$$
est une solution de l'équation pour chaque n et k. Supposons maintenant qu'on sache que la membrane d'un tambour se déplace selon l'une de ces solutions sans savoir pour quel n et k. On saupoudre alors légèrement la membrane du tambour de sable fin.
   (a) Quels sont n et k si le sable s'accumule le long de deux cercles concentriques tels qu'illustrés en pointillé :
   
   (b) Quels sont n et k si le sable s'accumule plutôt le long de l'axe des y tel qu'illustré :
   

3. Sur la boule $\mathbb{B} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ de rayon 1, On considère l'équation de Laplace
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U = 0 & \text{sur } \mathbb{B}; \\ U = z^2 & \text{sur } \partial\mathbb{B} \text{ (condition au bord).} \end{cases} \tag{2}$$
Dans les coordonnées sphériques (ρ,θ,ϕ), trouver une solution de cette équation en vous rappelant que sur $\partial\mathbb{B}$, $\rho = 1$ et donc $z|_{\partial\mathbb{B}} = \rho\cos\theta|_{\partial\mathbb{B}} = \cos\theta$. Les polynômes de Legendre $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z$ et $P_2(z) = \frac{3z^2-1}{2}$ pourraient servir.