Liste d'exercices V

En lien avec la semaine du 17 octobre

1. Soient $m, n \in \mathbb{N}_0$ avec $m \neq n$. On veut montrer que $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$.

   (a) Pour $k \in \mathbb{N}_0$, montrer que $\left((1-x^2)P_k'(x)\right)' + k(k+1)P_k(x) = 0$.

   (b) En utilisant l'identité précédente, montrer que

   $$\left((1-x^2)(P_m'P_n - P_mP_n')\right)' + \left(m(m+1) - n(n+1)\right)P_mP_n = 0.$$

   (c) Montrer que $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ en intégrant l'identité précédente.

2. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on veut montrer que $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.

   (a) En utilisant la formule de Rodrigues $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ et en intégrant par parties n fois dans

   $$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)\left(\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)dx,$$

   montrer que

   $$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx,$$

   où $P_n^{(n)}$ est la n-ième dérivée du polynôme de Legendre P_n.

   (b) En utilisant la formule de Rodrigues, montrer que $P_n^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

   (c) En faisant le changement de variable $x = \sin\theta$ et en intégrant par parties n fois, montrer que

   $$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n+1} d\theta = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}.$$

   (d) Utiliser les résultats précédents pour conclure que $\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.