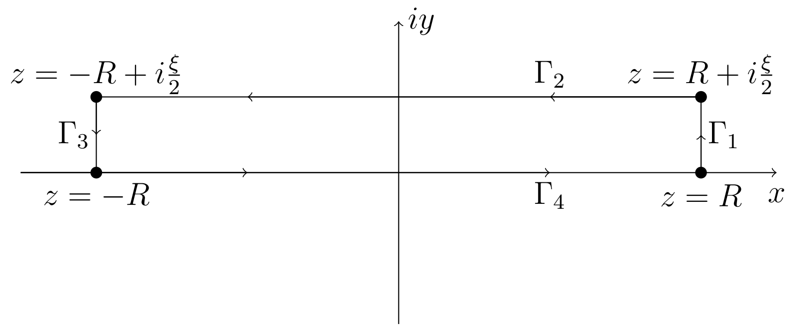
Liste d'exercices VI

En lien avec la semaine du lundi 24 octobre 2022

1. Soient deux matrices complexes $n \times n$ A et B auto-adjointes lorsqu'agissant sur $\mathbb{C}^n$ muni de son produit hermitien canonique. Supposons aussi que A et B commutent.
   (a) Montrer que $\mathbb{C}^n$ possède une base orthonormale de vecteurs qui sont simultanément des vecteurs propres pour A et B.
   (b) Montrer que la matrice U est unitaire si ses colonnes sont données par les vecteurs orthonormaux de la base de la sous-question précédente.
   (c) Montrer que la matrice U diagonalise simultanément A et B, c'est-à-dire que $U^{-1}AU$ et $U^{-1}BU$ sont des matrices diagonales.

2. Dans le plan complexe, considérer le rectangle ayant pour sommets $-R$, R, $R+i\frac{\xi}{2}$, et $-R+i\frac{\xi}{2}$, où $\xi \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. Si Γ est le chemin parcourant le périmètre du rectangle dans le sens anti-horaire, alors le théorème de Cauchy appliqué à la fonction holomorphe $f(z) = e^{-z^2}$ pour $z \in \mathbb{C}$ affirme que

$$0 = \int_\Gamma e^{-z^2} dz = \int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_4} e^{-z^2} dz.$$



   (a) Les parties de cette intégrale de contour le long des côtés droit Γ_1 et gauche Γ_2 du rectangle sont données par

$$I_1(R) = \int_0^{\frac{\xi}{2}} e^{-(R+iy)^2} i dy \quad \text{et} \quad I_3(R) = \int_{\frac{\xi}{2}}^0 e^{-(-R+iy)^2} i dy.$$

   Lorsque $R \to +\infty$, montrer que $I_1(R) \to 0$ et $I_3(R) \to 0$.
   (b) En considérant les parties de l'intégrale de contour le long des côtés inférieur Γ_4 et supérieur Γ_2, déduire du théorème de Cauchy que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-(x+i\frac{\xi}{2})^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx.$$