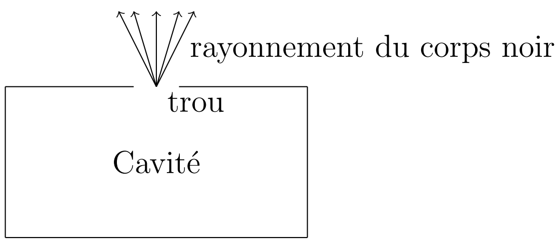
Liste d'exercices IX

En lien avec la semaine du 21 novembre 2022

Pour plus détails sur les exercices qui suivent, voir [1, complément L_V, p. 623-628].

Un corps noir peut être modélisé par une cavité



dans laquelle le champ électromagnétique correspond à un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants à une dimension. Or, lorsqu'on a plusieurs oscillateurs harmoniques de fréquence $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ maintenus à température T mesurée en kelvins, la loi de distribution de Boltzmann nous dit que la probabilité de trouver l'un de ces oscillateurs dans l'état d'énergie E est proportionnelle à $e^{-\frac{E}{kT}}$ où $k = 1,38 \times 10^{-23} J/K$ est la constante de Boltzmann. Autrement dit, pour la version quantique de l'oscillateur harmonique de fréquence ν, la probabilité qu'il soit dans l'état d'énergie $E_n = h\nu(n + \dfrac{1}{2}) = \hbar\omega(n + \dfrac{1}{2})$ pour $n \in \mathbb{N}_0$ est donnée par

$$P(n) = \frac{e^{-\frac{E_n}{kT}}}{Z} \tag{1}$$

où

$$Z := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

est la **fonction de partition** de l'oscillateur.

1. En utilisant la formule de la série géométrique $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, montrer que la fonction de partition de la version quantique de l'oscillateur harmonique de fréquence ν est donnée par
$$Z = \frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{1 - e^{\frac{-h\nu}{kT}}}. \tag{2}$$

2. À la température T, la moyenne de l'énergie d'un oscillateur harmonique (quantique) de fréquence ν est donnée par
$$\langle E \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} E_n P(n),$$
où la probabilité $P(n)$ est celle donnée par (1).

(a) Montrer qu'on a la relation $\langle E\rangle = \dfrac{kT^2}{Z}\dfrac{dZ}{dT}$.

(b) En utilisant la formule (2), conclure que

$$\langle E\rangle = \frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{3}$$

3. Pour l'oscillateur harmonique classique, l'énergie, autrement dit l'hamiltonien, est donnée par

$$\mathcal{E}(x,p) = \mathcal{H}(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{4}$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. En utilisant la version continue de la loi de distribution de Boltzmann, la moyenne de l'énergie d'un grand nombre d'oscillateurs harmoniques (classiques) maintenus à la température T est donnée par

$$\langle \mathcal{E}\rangle := \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x,p)e^{-\frac{\mathcal{E}(x,p)}{kT}}\,dxdp}{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\mathcal{E}(x,p)}{kT}}\,dxdp}. \tag{5}$$

En insérant (4) dans (5), montrer que

$$\langle \mathcal{E}\rangle = kT. \tag{6}$$

4. Montrer que $\lim_{T\to\infty} \dfrac{\langle E\rangle}{\langle \mathcal{E}\rangle} = 1$, c'est-à-dire que pour des températures $T >> 0$ assez élevées, les moyennes classique et quantique de l'énergie sont à peu près les mêmes : $\langle E\rangle \approx \langle \mathcal{E}\rangle$.

5. Pour T près de zéro, tracer les graphes de $\langle E\rangle$ et $\langle \mathcal{E}\rangle$ en tant que fonctions de T et expliquer en quoi ils diffèrent.

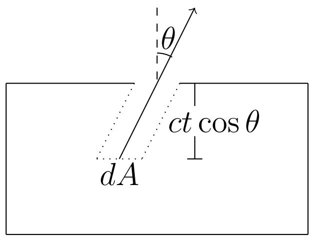
6. Pour des fréquences élevées ν, un argument physique montre que le nombre d'oscillateurs harmoniques de fréquences entre ν et $\nu + d\nu$ d'un corps noir modélisé par une cavité ne dépend pas de la géométrie et est donné par $N(\nu) = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}V$, où c est la vitesse de la lumière et V est le volume de la cavité. Pour obtenir l'énergie électromagnétique $u(\nu)$ de la cavité par unité de volume dans la bande de fréquences entre ν et $\nu + d\nu$, il suffit alors de multiplier $\frac{N(\nu)}{V}$ par la moyenne de l'énergie des oscillateurs de fréquence ν, à savoir $\langle \mathcal{E}\rangle$ dans le cas classique et $\langle E\rangle - \frac{h\nu}{2}$ dans le cas quantique [1]. Montrer que la densité d'énergie à la fréquence ν est donnée par

(a) $u_{cl}(\nu)\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}kT$ dans le cas classique ;

(b) $u_Q(\nu) = \dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3}\dfrac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ dans le cas quantique.

1. Dans le cas quantique, on soustrait $\frac{h\nu}{2}$, car on ne veut prendre en compte que l'énergie qui peut être extraite des oscillateurs de la cavité.

7. Comme le rayonnement du corps noir est isotrope, la quantité infinitésimale d'énergie dE_ν passant par la région d'aire dA du trou de la cavité en un laps de temps t associé au rayonnement de fréquence entre ν et $\nu + d\nu$ se dirigeant dans la direction d'un angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ centré en (θ, ϕ) (en coordonnées sphériques) tel qu'illustré,



est donnée par

$$dE_\nu = u(\nu)(ct\cos\theta dA)\frac{d\Omega}{4\pi}, \tag{7}$$

où $u(\nu)$ est la densité d'énergie (classique ou quantique) du problème précédent et

$$(ct\cos\theta)dA$$

est le volume balayé dans la cavité dans le laps de temps t par les rayons pointant dans la direction (θ, ϕ) passant par la région d'aire dA. Ainsi, entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, l'émissivité $I(\nu)$ du corps noir, qui est la puissance de rayonnement par unité de surface, est obtenue en intégrant $\frac{dE_\nu}{tdA}$ sur toutes les directions de rayonnement pointant vers le haut (i.e. $\theta \in (0, \pi/2)$) :

$$I(\nu) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} u(\nu)c\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{(2\pi)(1/2)cu(\nu)}{4\pi} = \frac{cu(\nu)}{4}.$$

(a) Montrer que dans le modèle classique, l'émissivité est donnée par $I_{cl}(\nu) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT$.

(b) En termes de la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ et en tenant compte du fait que $d\nu = -\frac{cd\lambda}{\lambda^2}$, montrer que l'émissivité (classique) pour les longueurs d'onde entre λ et $\lambda + d\lambda$ est donnée par

$$I_{cl}(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4}kT,$$

ce qui correspond à la formule de Rayleigh-Jeans.

(c) Montrer que dans le modèle quantique, l'émissivité est plutôt donnée par

$$I_Q(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

(d) Lorsqu'on écrit l'émissivité en termes de la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$ pour les longueurs d'onde entre λ et $\lambda + d\lambda$, montrer qu'on retrouve la formule de Planck

$$I_Q(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

Références

[1] Claude Cohen-Tannoudji et Bernard Diu et Franck Laloë. *Mécanique Quantique I.* Hermann, 1995.