Devoir I

Dû le jeudi 21 septembre 2023

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Calculer la longueur d'arc entre $t = 0$ et $t = 2\pi$ de la cycloïde donnée par

$$\vec{\gamma}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

2. En coordonnées polaires (r, θ), on peut parfois utiliser la coordonnée angulaire θ pour paramétrer une courbe en spécifiant le rayon r pour chaque valeur de θ,

$$r = r(\theta), \quad a \leq \theta \leq b.$$

Lorsque la courbe est régulière, montrer que la longueur d'arc entre $\theta = a$ et $\theta = b$ est donnée par

$$\ell = \int_a^b \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta.$$

3. Déterminer l'angle d'intersection des deux plans de $\mathbb{R}^3$ définis respectivement par les équations

$$5x + 3y + 2z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 4y - 7z = 0.$$

4. Déterminer la courbure et la torsion le long de la courbe paramétrée

$$\vec{\gamma}(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right),$$

où a et b sont des constantes strictement positives et $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. On considère la courbe paramétrée $\vec{\gamma} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\vec{\gamma}(t) = (2 + \sqrt{2} \cos t, 1 - \sin t, 3 + \sin t).$$

   (a) Déterminer le repère de Frenet le long de cette courbe.

   (b) Calculer la courbure et la torsion le long de cette courbe.