Devoir II

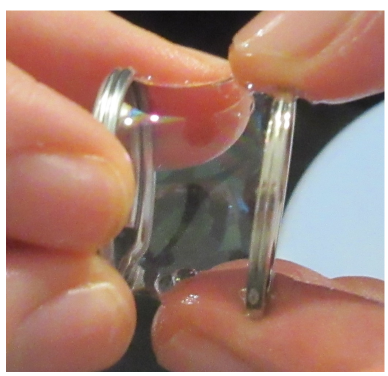
Dû le jeudi 5 octobre 2023

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Pour $u \in (0, 2\pi)$ et $v \in \mathbb{R}$, montrer que l'image de l'application $\vec{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ (c'est un exemple d'hélicoïde).

2. On considère la fonction $f(x, y, z) = xyz^2$.
   (a) Déterminer quels sont les points critiques de f.
   (b) Quelles sont les valeurs $c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la surface de niveau $f(x, y, z) = c$ est une surface régulière ?

3. Montrer que la caténoïde d'équation $x^2 + y^2 = (\cosh z)^2$ est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.



4. Montrer que le graphe de la fonction $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ n'est pas une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

5. On considère la fonction $f(x, y, z) = z^2$. Montrer que $f^{-1}(0)$ est une surface régulière même si 0 n'est pas une valeur régulière de f.