Devoir III

Dû le jeudi 9 novembre 2023

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Soit p un point d'une surface orientée $(S, \vec{N})$. Montrer que l'endomorphisme de Weingarten $d\vec{N}_p : T_pS \to T_pS$ en ce point est complètement déterminé par la première et la seconde forme fondamentale.

2. Soit $\vec{\gamma} : I \to S$ une courbe régulière paramétrée par la longueur d'arc, où $(S, \vec{N})$ est une surface orientée ayant une courbure de Gauss strictement positive : $K > 0$. Montrer que la courbure k de la courbe $\vec{\gamma}$ en un point p est telle que
$$k \geq \min\{|k_1|, |k_2|\},$$
où k_1 et k_2 sont les courbures principales de la surface S en p.

3. Soit p un point d'une surface orientée $(S, \vec{N})$. Montrer que la courbure moyenne H_p en p est donnée par
$$H_p = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta,$$
où $k_n(\theta)$ est la courbure normale en p le long d'une direction formant un angle θ avec une direction fixée.

4. Déterminer l'image de l'application de Gauss pour le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ avec orientation spécifiée par le champ de vecteurs normaux unitaires $\vec{N}$ pointant vers le haut.

5. Soit $(S, \vec{N})$ une surface orientée tangente à un plan le long d'une courbe paramétrée régulière. Montrer que les points de cette courbe sont des points paraboliques ou plans de S.