Devoir IV

Dû le mardi 5 décembre 2023

Instructions : Il y a cinq problèmes. Chaque problème vaut vingt points pour un total de cent points. Pour chacun des problèmes, présenter une solution détaillée et soignée qui soit lisible et compréhensible pour une personne ne connaissant pas a priori la solution. Chaque réponse doit être pleinement justifiée. Il est possible de travailler en équipe avec d'autres étudiants, mais ultimement, il est important que chacun écrive sa propre solution.

1. Montrer que la courbure de Gauss du ruban de Möbius induit par la nappe paramétrée

$$\vec{x}(u,v) = \left(\left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u, \left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u, v\cos\frac{u}{2}\right)$$

est donnée par $K = \dfrac{-1}{\left(\frac{1}{4}v^2 + (2 - v\sin(\frac{u}{2}))^2\right)^2}$.

2. Montrer que le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = x^2 - y^2$ ne sont pas localement isométriques.

3. Montrer qu'il n'existe aucune nappe paramétrée $\vec{x} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ pour laquelle on a identiquement $E = G = 1$, $F = 0$, $e = 1$, $g = -1$ et $f = 0$ sur $\mathcal{U}$.

4. Pour $a > r > 0$, on considère le tore de révolution obtenu en faisant pivoter le cercle d'équation

$$(x-a)^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0$$

autour de l'axe des z. Les parallèles engendrés par les points $(a+r, 0)$, $(a-r, 0)$ et (a, r) sont respectivement appelés le parallèle maximal, le parallèle minimal et le parallèle supérieur. Parmi ces trois parallèles, lesquels sont des géodésiques, lesquels sont en tout point tangents à une direction asymptotique et lesquels sont en tout point tangents à une direction principale ?

5. Soit $\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par la longueur d'arc dont la courbure n'est jamais nulle. Considérons la surface réglée S engendrée par l'image de l'application

$$\vec{x}(u,v) = \vec{\gamma}(u) + v\vec{b}(u), \quad u \in I, \quad v \in \mathbb{R},$$

où $\vec{b}$ est le vecteur binomial de $\vec{\gamma}$. Si S est une surface régulière et que $\vec{x}$ est une nappe paramétrée, montrer que $\vec{\gamma} : I \to S$ est une géodésique de S.