MAT7213 : Devoir III

Dû le jeudi 3 décembre 2020

1. Pour $d < n$, soit $\mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$ l'inclusion canonique. Montrez que l'application de restriction $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni u \to u|_{\mathbb{R}^{n-d}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-d})$ s'étend en une application linéaire continue
$$L^2_k(\mathbb{R}^n) \to L^2_{k-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^{n-d})$$
pourvu que $k > \frac{d}{2}$.

2. Montrez que pour $k > \frac{n}{2}$, l'application $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni (u, v) \mapsto uv \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'étend en une application bilinéaire continue $L^2_k(\mathbb{R}^n) \times L^2_k(\mathbb{R}^n) \to L^2_k(\mathbb{R}^n)$.

3. Soit (X^n, g) une variété riemannienne fermée de dimension n et Δ_g le laplacien associé. Pour un certain $k > \frac{n}{2}$, soit $u \in L^2_k(X)$ une fonction telle que $\Delta u = u^2 + f$ pour $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$. Montrez qu'en fait $u \in \mathcal{C}^\infty(X)$.

4. Soit X une variété fermée de dimension $n > 2$. Montrez qu'un opérateur différentiel $P \in \mathrm{Diff}^1(X) \subset \Psi^1(X)$ d'ordre 1 agissant sur les fonctions n'est jamais elliptique.

5. Soit (X, g) une variété riemannienne fermée et orientée. Montrez que les espaces propres des valeurs propres strictement positives du Laplacien de Hodge $\Delta : \Omega^*(X) \to \Omega^*(X)$ sont tous de dimension paire. Si $\dim X$ n'est pas un multiple de 4, montrez aussi que l'espace des formes harmoniques est aussi de dimension paire.

6. Soit X une variété fermée. Soit $\mathbb{R} \ni t \mapsto (g_t, \omega_t, J_t)$ une famille lisse de structures kählériennes, où g_t est la métrique kählérienne, J_t est la structure complexe compatible et $\omega_t = g_t(J_t\cdot, \cdot)$ est la forme symplectique associée. Montrez que la dimension du groupe de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X, J_t)$ ne dépend pas de t. Les faits suivants seront utiles :
   (a) $\sum_{p+q=k} \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X, J_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X; \mathbb{C})$, où $H^k(X; \mathbb{C})$ est le groupe de cohomologie singulière de X de degré k à coefficients dans $\mathbb{C}$;
   (b) $H^{p,q}(X, J_t)$ est isomorphe au noyau de l'opérateur $\Delta_t : \Omega^{p,q}(X, J_t) \to \Omega^{p,q}(X, J_t)$, où Δ_t est le laplacien de Hodge associée à la métrique g_t et $\Omega^{p,q}(X, J_t)$ est l'espace des formes de type (p, q) de la variété complexe (X, J_t). En particulier,
$$\Omega^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(X, J_t).$$