MAT7213 : Devoir II

Dû le jeudi 29 octobre 2020

1. ([Mel, Problème 2.12]) Montrez que le noyau de Schwartz d'un opérateur pseudodifferentiel $A \in \Psi^m_\infty(\mathbb{R}^n)$ est lisse sur le complément de la diagonale. Indice : Montrez d'abord que $(x-y)^\alpha K_A(x,y)$ est différentiable autant de fois que l'on veut en prenant $|\alpha|$ assez grand.
2. ([Mel, Problème 2.21]) Montrez que tout opérateur linéaire continu $A : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ possède un noyau de Schwartz dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.
3. Démontrez le lemme de Borel, à savoir que pour des nombres $a_\alpha \in \mathbb{C}$ arbitraires spécifiés pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, on puisse toujours trouver une fonction lisse $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ayant $\displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha$ pour série de Taylor à l'origine.
4. Montrez que la quantification de Weyl q_W possède un inverse $\sigma_W : \Psi^m_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^m_\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tel que $\sigma_W(A)(x,\xi) \sim e^{-\frac{i}{2}D_\xi\cdot D_x}\sigma_G(A)$. Montrez de même que pour tout $A \in \Psi^m_\infty(\mathbb{R}^n)$, $B \in \Psi^{m'}_\infty(\mathbb{R}^n)$, on a
$$\sigma_W(A\circ B)(x,\xi) \sim e^{\frac{i}{2}(D_\xi\cdot D_y - D_x\cdot D_\eta)}(\sigma_W(A)(x,\xi)\sigma_W(B)(y,\eta))\Big|_{x=y,\xi=\eta}.$$
5. ([Mel, Problème 2.13]) Montrez que pour chaque $k \geq 0$, la boule de rayon 1 dans $L^2_k(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ n'est pas précompacte, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{f_j\}$ dans cette boule n'admettant aucune sous-suite convergente dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
6. ([Mel, Problème 2.2]) Soit $a \in \mathcal{S}^1_\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ le symbole d'un opérateur elliptique. Montrez que pour $r > 0$ suffisamment grand, l'intégrale
$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a(x,re^{i\theta})}\frac{d}{d\theta}a(x,re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}\log(a(x,re^{i\theta}))d\theta$$
est bien définie et est égale à un entier indépendant de r et de $x \in \mathbb{R}^2$. Concluez qu'il existe un opérateur elliptique $A \in \Psi^1(\mathbb{R}^2)$ tel que la classe d'équivalence $\sigma_1(A) \in \mathcal{S}^{1-[1]}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ de son symbole principal ne contienne aucun symbole b ne s'annulant nulle part.

Problèmes supplémentaires : problèmes 1.10, 1.11, 1.15 dans [Mel].

Références

[Mel] Richard B. Melrose. Introduction to microlocal analysis. disponible en ligne : http ://www-math.mit.edu/ rbm/iml90.pdf.