MAT7213 : Devoir I

Dû le jeudi premier octobre 2020

1. ([Mel, Problème 1.2]) Montrez que la fonction $u(x) = e^x \cos(e^x)$ est une distribution tempérée.
2. ([Mel, Problème 1.4]) Montrez que
$$d(\phi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{\|\phi - \psi\|_k}{1 + \|\phi - \psi\|_k} \right) \tag{*}$$
définit bien une métrique sur l'espace des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il sera sans doute utile d'établir au préalable l'inégalité
$$\frac{\|u+v\|}{1+\|u+v\|} \leq \frac{\|u\|}{1+\|u\|} + \frac{\|v\|}{1+\|v\|}$$
pour $\| \cdot \|$ une norme sur un espace vectoriel.
3. ([Mel, Problème 1.4]) Montrez qu'une suite $\{\phi_n\}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est de Cauchy, respectivement converge vers ϕ, par rapport à la métrique d de (*) si et seulement si $\{\phi_n\}$ est de Cauchy, respectivement converge vers ϕ, par rapport à chaque norme $\| \cdot \|_k$.
4. En utilisant le problème précédent, montrez que l'espace métrique $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ est complet, c'est-à-dire que chaque suite de Cauchy converge.
5. ([Mel, Problème 1.9]) Calculez la transformée de Fourier de $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En dimension 1, une manière de procéder est d'utiliser l'identité
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-x^2} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int e^{-(x+\frac{i}{2}\xi)^2} dx$$
et d'appliquer le théorème des résidus à un contour judicieusement choisi dans le plan complexe.
6. ([Mel, Problème 1.12]) Le *support* d'une distribution tempérée peut être défini en termes du support d'une fonction de Schwartz. Rappelons que le support $\mathrm{supp}(\phi)$ d'une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est donné par la fermeture de l'ensemble des points où la fonction ne s'annule pas. Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit
$$\mathrm{supp}(u) = \mathcal{U}^c, \quad \mathcal{U} = \bigcup \{\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert} \mid \mathrm{supp}(\phi) \subset \mathcal{U}' \implies u(\phi) = 0\}.$$
Montrez que les définitions du support pour $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sont compatibles avec l'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Problèmes supplémentaires : problèmes 1.1(difficile), 1.3, 1.6 et 1.8 dans [Mel].

Références

[Mel] Richard B. Melrose. Introduction to microlocal analysis. disponible en ligne : http ://www-math.mit.edu/ rbm/iml90.pdf.