

# Étude des équations aux dérivées partielles par le biais de l'analyse microlocale

Frédéric Rochon

13 juin 2024

## Résumé

Ce recueil contient les notes du cours «Équations aux dérivées partielles» (MAT7213) donné à l'Université du Québec à Montréal à l'automne 2020. Celles-ci s'inspirent très largement des notes «Introduction to microlocal analysis» de Richard Melrose [Mel]. On y préconise en particulier une approche microlocale pour l'étude des équations aux dérivées partielles dans des cadres géométriques. Ce recueil se veut accessible pour des étudiants ayant déjà acquis des bases solides en analyse fonctionnelle et en géométrie différentielle.

## Introduction

Les équations aux dérivées partielles apparaissent naturellement en sciences naturelles, particulièrement en physique. Parmi les exemples les plus importants, on compte notamment l'équation des ondes et l'équation de la chaleur. D'un point de vue pratique, on est donc naturellement amené à chercher des solutions explicites exactes, ou alors des solutions approximatives obtenues à l'aide de méthodes numériques. Cependant, d'un point de vue plus théorique, cette quête de solutions présuppose qu'on sache qu'une solution existe, ce qui ne va pas toujours de soi. Même lorsqu'on a réussi à répondre par l'affirmative à la question de l'existence d'une solution, d'autres questions de nature théorique s'invitent naturellement :

- La solution est-elle unique ?
- Sinon, combien y a-t-il de solutions ?
- Quelles sont les propriétés de la solution ? Est-elle régulière ? Possède-t-elle des symétries ?

Dans ce cours, on privilégiera ce type plus théorique de considérations pour trois grands types d'équations aux dérivées partielles :

1. Les équations elliptiques, e.g. :

(a) Équation de Laplace  $\Delta u = 0$ , où  $\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$  est le Laplacien sur  $\mathbb{R}^3$ ;

(b) Équation de Poisson :  $\Delta u = \rho$ ;

- (c) Équation de Monge-Ampère complexe satisfaite par le potentiel de métriques de Kähler-Einstein ;
  - (d) Équation de Seiberg-Witten ;
  - (e) Équation des courbes pseudoholomorphes en topologie symplectique ;
2. Les équations paraboliques, e.g. :
- (a) Équation de la chaleur (ou de la diffusion) sur  $\mathbb{R}^3$  :  $\frac{\partial}{\partial t}u = -\Delta u$  ;
  - (b) Flot de Ricci ;
  - (c) Flot de la courbure moyenne ;
  - (d) Flot de Yamabe ;
3. Équations hyperboliques, e.g. :
- (a) Équation des ondes sur  $\mathbb{R}^3$  :  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = -\Delta u$  ;
  - (b) Équation de Schrödinger en mécanique quantique ;
  - (c) Équation d'Einstein en théorie de la relativité générale.

On ne pourra certainement pas étudier en détail toutes ces équations. En fait, l'emphase sera mise sur les équations elliptiques linéaires, mais on parlera aussi de l'équation de la chaleur. Il faudra auparavant s'initier à l'analyse microlocale, un sujet qui généralise en quelque sorte l'analyse de Fourier à des espaces courbes n'ayant pas nécessairement de symétries.

Afin de donner un avant-goût des méthodes que nous utiliserons, considérons l'équation elliptique linéaire

$$\Delta u + u = f \tag{0.1}$$

sur  $\mathbb{R}^3$ , où  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  est une fonction lisse à support compact, le **support**  $\text{supp}(\phi)$  d'une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  étant par définition la fermeture du sous-ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) \neq 0\}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour résoudre cette équation, on peut prendre la transformée de Fourier de  $u$ ,

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx, \tag{0.2}$$

où  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $dx = dx_1 dx_2 dx_3$  et  $x \cdot \xi := x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3$ . Pour  $u$  solution de l'équation, on a alors

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(\Delta u + u)(\xi) = (|\xi|^2 + 1)\hat{u}(\xi), \tag{0.3}$$

où  $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$  et dans la deuxième égalité, on a supposé qu'il était possible d'intégrer par parties, de sorte qu'on ait bien

$$\mathcal{F}(\Delta u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} \Delta u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta e^{-ix \cdot \xi}) u(x) dx = |\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^3} u(x) dx = |\xi|^2 \hat{u}(\xi). \tag{0.4}$$

À partir de (0.3), on peut alors facilement déterminer la solution  $u$ ,

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} \implies u(x) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + |\xi|^2} \right) (x), \tag{0.5}$$

où  $\mathcal{F}^{-1}$  dénote l'inverse de la transformée de Fourier. Dans ce cadre, l'opérateur

$$f \mapsto \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}(f)(\xi)}{1 + |\xi|^2} \right)$$

peut donc être vu comme l'inverse de l'opérateur  $\Delta + 1$ .

Dans cet exemple, d'importantes simplifications découlent du fait que les coefficients devant les dérivées partielles apparaissant dans  $\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$  sont constants. L'objectif du cours sera de généraliser cette approche afin qu'elle fonctionne aussi pour des opérateurs elliptiques dont les coefficients devant les dérivées partielles sont variables. Une telle généralisation permettra entre autres d'étudier les opérateurs elliptiques sur des espaces courbes comme le laplacien associé à une métrique riemannienne. Pour y arriver, mais aussi pour clarifier les zones d'ombre de l'exemple précédent, nous devons dans un premier temps définir de façon rigoureuse la transformée de Fourier et décrire de quelle manière exactement celle-ci est inversible, ce qui est le sujet du Chapitre 1. Cela permet au Chapitre 2 d'introduire les opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}^n$ , un concept fournissant le cadre général pour décrire l'inverse d'opérateurs tels que  $\Delta + 1$ . Au Chapitre 3, on adapte cette notion au cadre des variétés lisses fermées, ce qui permet dériver quelques applications importantes. Enfin, au Chapitre 4, on étudie l'équation de la chaleur en utilisant l'approche microlocale de Melrose [Mel93, § 7].

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Distributions tempérées et transformée de Fourier</b>	<b>5</b>
1.1	Espace de Schwartz . . . . .	5
1.2	Distributions tempérées . . . . .	7
1.3	Transformée de Fourier . . . . .	12
1.4	Les opérateurs différentiels et la transformée de Fourier . . . . .	17
1.5	Exercices supplémentaires . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Opérateurs pseudodifférentiels sur <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>21</b>
2.1	L'espace des symboles . . . . .	21
2.2	Les opérateurs pseudodifférentiels . . . . .	23
2.3	Composition . . . . .	26
2.4	Réduction et sommes asymptotiques . . . . .	28
2.5	Quantification . . . . .	33
2.6	Ellipticité . . . . .	35
2.7	Action sur les espaces de Sobolev . . . . .	39
2.8	Pseudolocalité . . . . .	49
2.9	Exercices supplémentaires . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Opérateurs pseudodifférentiels sur une variété lisse</b>	<b>53</b>
3.1	Invariance par changement de coordonnées . . . . .	53
3.2	Définition des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété fermée . . . . .	55
3.3	Symbole principal . . . . .	56
3.4	Espaces de Sobolev sur une variété fermée . . . . .	59
3.5	Opérateurs de Fredholm . . . . .	61
3.6	Quelques conséquences pour les opérateurs elliptiques . . . . .	67
3.7	Opérateurs pseudodifférentiels agissant sur les sections d'un fibré vectoriel . . . . .	70
3.8	Théorie de Hodge . . . . .	74
3.9	Spectre d'un opérateur elliptique . . . . .	79
3.10	Exercices supplémentaires . . . . .	81
<b>4</b>	<b>L'équation de la chaleur</b>	<b>82</b>
4.1	L'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	82
4.2	Équation de la chaleur sur une variété riemannienne fermée . . . . .	87
4.3	Les opérateurs de classe trace . . . . .	98
4.4	La trace du noyau de la chaleur . . . . .	102

# 1 Distributions tempérées et transformée de Fourier

Sur  $\mathbb{R}^n$ , on dénotera les coordonnées canoniques par  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , et on utilisera les notations

$$x := (x_1, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad |x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

ainsi que

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{pour } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n \text{ un multi-indice,}$$

où  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  et  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers strictement positifs. Il sera commode aussi d'utiliser les notations suivantes pour les dérivées partielles :

$$D_j := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

À titre d'exemple, dans cette notation, le laplacien sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit

$$\Delta = \sum_{j=1}^n D_j^2.$$

## 1.1 Espace de Schwartz

Pour pouvoir définir rigoureusement la transformée de Fourier et son inverse, il faut au préalable introduire l'espace de fonctions sur lequel elle sera définie.

**Définition 1.1.** L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est constitué des fonctions lisses  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n. \quad (1.1)$$

Ce sont les fonctions lisses qui, avec toutes leurs dérivées, décroissent plus rapidement que  $\frac{1}{|x|^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ .

**Exemple 1.2.** L'espace des fonctions lisses à support compact,  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , est contenu dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Exemple 1.3.** La fonction gaussienne  $e^{-|x|^2}$  est contenue dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , mais n'est pas à support compact, donc l'inclusion  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est stricte.

Pour  $k \in \mathbb{N}_0$ , on peut définir une norme sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par

$$\|\phi\|_k := \max_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi| \right), \quad (1.2)$$

où  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  un multi-indice. On vérifie aisément que  $\|\cdot\|_k$  satisfait bien aux trois propriétés d'une norme, à savoir que

$$\|\phi\|_k \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \|\phi\|_k = 0 \iff \phi \equiv 0; \quad (1.3)$$

$$\|t\phi\|_k = |t| \|\phi\|_k \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \in \mathbb{C}; \quad (1.4)$$

$$\|\phi + \psi\|_k \leq \|\phi\|_k + \|\psi\|_k \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.5)$$

Mises ensemble, ces normes définissent une topologie sur l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans laquelle un sous-ensemble  $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est ouvert si et seulement si pour tout  $\phi \in \mathcal{U}$ , il existe  $k \in \mathbb{N}_0$  et  $\delta > 0$  tels que

$$\|\psi - \phi\|_k < \delta \implies \psi \in \mathcal{U}.$$

**Remarque 1.4.** Pour  $k \leq \ell$ , la norme  $\|\cdot\|_\ell$  est plus fine que la norme  $\|\cdot\|_k$  au sens où  $\|\phi\|_k \leq \|\phi\|_\ell$  pour tout  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice 1.5.** Montrer que muni de la topologie induite par les normes  $\|\cdot\|_k$ , l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est en fait un espace métrique avec distance donnée par

$$d(\phi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left( \frac{\|\phi - \psi\|_k}{1 + \|\phi - \psi\|_k} \right). \quad (1.6)$$

Il sera sans doute utile d'établir au préalable l'inégalité

$$\frac{\|u + v\|}{1 + \|u + v\|} \leq \frac{\|u\|}{1 + \|u\|} + \frac{\|v\|}{1 + \|v\|}$$

pour  $\|\cdot\|$  une norme sur un espace vectoriel.

**Proposition 1.6.** L'espace des fonctions lisses à support compact  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* Soit  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction telle que  $\rho \equiv 1$  pour  $|x| \leq 1$  et  $\rho \equiv 0$  pour  $|x| \geq 2$ . Posons  $\rho_R(x) = \rho\left(\frac{x}{R}\right)$  pour  $R > 0$ . Alors  $\forall k \in \mathbb{N}$  et  $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|\rho_R \psi - \psi\|_k = 0, \quad (1.7)$$

autrement dit  $\rho_R \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est aussi près de  $\psi$  que l'on veut en prenant  $R$  assez grand. En effet, pour  $k = 0$ , on a que

$$\|\rho_R \psi - \psi\|_0 = \|(\rho_R - 1)\psi\|_0 = \sup_{|x| \geq R} |(\rho_R - 1)\psi| \leq \sup_{|x| \geq R} (1 + C)|\psi|,$$

où  $C = \sup |\rho|$ . Comme  $|\psi(x)| \rightarrow 0$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ , on a donc que l'équation (1.7) est vérifiée pour  $k = 0$ . Pour  $k \geq 1$ , on peut procéder similairement en tenant compte du fait que la fonction  $D_x^\alpha \rho_R = \frac{1}{R^{|\alpha|}} D_x^\alpha \rho\left(\frac{\cdot}{R}\right)$  est bornée par une constante indépendante de  $R \geq 1$ , donc que

$$\|\rho_R \psi - \psi\|_k \leq \sup_{|\alpha| + |\beta| \leq k} C_k \left( \sup_{|x| \geq R} |x^\alpha D^\beta \psi| \right)$$

pour une constante  $C_k > 0$  dépendant de  $k$ , mais pas de  $R$ . Comme  $x^\alpha D^\beta \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a donc que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x| \geq R} |x^\alpha D^\beta \psi| = 0,$$

d'où on en déduit (1.7) pour  $k \geq 1$ . □

**Remarque 1.7.** L'application

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

induit un difféomorphisme entre  $\mathbb{R}^n$  et l'intérieur de la boule

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}.$$

Sous ce difféomorphisme, on peut montrer que l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est envoyé sur les fonctions lisses de  $\mathbb{B}^n$  qui, avec toutes leurs dérivées partielles, s'annulent sur le bord  $\partial\mathbb{B}^n$  de  $\mathbb{B}^n$ . On a donc une injection  $R_* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{B}^n)$ . Sous cette injection, on peut montrer que la topologie de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est celle induite par la topologie  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{B}^n)$ , c'est-à-dire la topologie de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{B}^n)$  donnée par les normes

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}^k} = \sup_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \phi|, \quad \phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{B}^n), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Essentiellement par définition de la topologie de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a les applications continues suivantes :

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \text{et} & & x^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \phi &\mapsto D^\alpha \phi & & & \phi &\mapsto x^\alpha \phi \end{aligned} \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \quad (1.8)$$

On a aussi une application continue

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m}) \\ (\psi, \phi) &\mapsto \psi \boxtimes \phi \end{aligned} \quad \text{où } \psi \boxtimes \phi(x, y) = \psi(x)\phi(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m. \quad (1.9)$$

Si  $\pi_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  dénote l'inclusion canonique pour  $k < n$ , alors

$$\pi_k^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \quad \text{avec} \quad \pi_k^* f(y) = f(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \quad (1.10)$$

est une application continue. Comme  $\pi_k^*(f \boxtimes \rho) = f$  pour  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$  avec  $\rho(0) = 1$ , cette application est aussi surjective.

## 1.2 Distributions tempérées

Considérons l'application bilinéaire continue

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\psi, \phi) &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\phi(x)dx \end{aligned} \quad \text{où } dx = dx_1 \dots dx_n. \quad (1.11)$$

L'application est bien continue, car  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^n \psi| \leq (n+1)^n \|\psi\|_{2n}$ , d'où

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\phi(x) \right| &\leq (n+1)^n \|\psi\|_{2n} \|\phi\|_0 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{n+1}} \right) \\ &= C_n \|\psi\|_{2n} \|\phi\|_0, \quad C_n = (n+1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En fixant  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on peut donc définir une application linéaire continue

$$T_\phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}, \quad T_\phi(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\psi(x)dx, \quad (1.13)$$

la continuité découlant du fait que

$$|T_\phi(\psi)| \leq (C_n \|\phi\|_0) \|\psi\|_{2n}.$$

**Définition 1.8.** L'espace des **distributions tempérées**  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est le dual de l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctionnelles continues linéaires

$$u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exists k \in \mathbb{N}_0, C_k > 0 \text{ tels que } |u(\psi)| \leq C_k \|\psi\|_k \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

**Lemme 1.9.** L'application  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \phi \mapsto T_\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est injective.

*Démonstration.* Par continuité de  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$T_\phi(\bar{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^2 dx = 0 \iff \phi \equiv 0,$$

donc  $T_\phi = 0 \iff \phi \equiv 0$ . □

En fait, si  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue bornée, alors le même argument montre que

$$T_u(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\psi(x)dx, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (1.14)$$

définit une distribution tempérée. À nouveau, celle-ci sera nulle si et seulement si  $u \equiv 0$ . En effet, si  $u = 0$ , alors clairement  $T_u = 0$ . D'autre part, si  $u$  n'est pas nulle, alors il existe  $y \in \mathbb{R}^n$  tel que  $u(y) \neq 0$ . Soit  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction à valeurs réelles telle que  $\rho(0) > 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$  et  $\rho(x) = 0$  pour  $|x| \geq 1$ . Posons  $\rho_\epsilon(x) := \frac{\rho(\frac{x-y}{\epsilon})}{\epsilon^n}$ . Puisque  $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon f dx$  donne une moyenne de  $f$  dans la boule de rayon  $\epsilon$  centrée en  $y$  par rapport à la mesure  $\rho_\epsilon dx$ , on a par continuité de  $u$  que

$$T_u(\rho_\epsilon) \neq 0$$

pour  $\epsilon > 0$  assez petit, ce qui montre que la distribution tempérée  $T_u$  ne peut-être nulle dans ce cas.

**Remarque 1.10.** Plus généralement, on définit l'espace des distributions  $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  comme étant l'espace des fonctionnelles linéaires  $u : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  telles que pour tout sous-ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  et une constante  $C_{K,k} > 0$  tels que

$$|u(\phi)| \leq C_{K,k} \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |x^\alpha \phi| \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{supp } \phi \subset K.$$

L'inclusion  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  correspond donc dualement à l'inclusion  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ .



La topologie qu'on considèrera sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est la **topologie faible**, à savoir la topologie la moins fine (celle ayant le moins d'ensembles ouverts) rendant les applications linéaires

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto u(\phi) \in \mathbb{C}$$

continues pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . La topologie est donc induite par les semi-normes

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto |u(\phi)| \in \mathbb{R}$$

pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Les ensembles de la forme

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid |u(\phi_j)| < \epsilon_j, \quad \phi_j \in \Phi\}$$

constituent une base de voisinages de  $0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , où  $\Phi \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est un sous-ensemble fini et les  $\epsilon_j$  sont des nombres strictement positifs.

**Exercice 1.11.** [Mel, Problème 1.8] Montrer que l'injection  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  du Lemme 1.9 est continue et que son image dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est dense.

**Exemple 1.12.** La **distribution de Dirac**

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto \phi(0) \end{aligned}$$

est une distribution tempérée, puisque  $|\delta(\phi)| \leq \|\phi\|_0$  pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

La distribution de Dirac est aussi une mesure. Cependant, en tant que distribution, ses dérivées sont aussi bien définies en tant que distributions tempérées, bien qu'elles ne soient pas elles-mêmes des mesures. En effet, pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a en intégrant par parties que

$$T_{D_j\phi}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} (D_j\phi)\psi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \phi D_j\psi dx = T_\phi(-D_j\psi).$$

Cela suggère donc de définir la dérivée partielle  $D_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  d'une distribution tempérée  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  par

$$D_j u(\psi) := u(-D_j\psi), \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De même, on peut définir  $x_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  par

$$x_j u(\psi) := u(x_j\psi), \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Ce sont les prolongements par continuité des applications

$$D_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad x_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

à  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Maintenant, si  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue et bornée, on peut par (1.14) la voir comme une distribution tempérée, de sorte que  $x^\alpha D^\beta u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est défini au sens des distributions. La réciproque est le théorème de représentation de Schwartz.

**Théorème 1.13.** *Pour tout  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , il existe une collection finie  $u_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  de fonctions continues bornées avec  $|\alpha| + |\beta| \leq k$  de sorte que :*

$$u = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k} x^\alpha D^\beta u_{\alpha\beta}.$$

*Démonstration.* Voir [Mel, Problème 1.15]. □

Pour  $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  une distribution tempérée, on peut définir une application linéaire continue  $O_K : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  donnée par

$$O_K(\psi)(\phi) = K(\phi \boxtimes \psi).$$

La réciproque est le théorème du noyau de Schwartz.

**Théorème 1.14.** *Il y a une bijection entre  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$  et les applications linéaires continues  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  donnée par*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m}) \ni K \mapsto O_K.$$

*Démonstration.* Voir le problème I.16 dans [Mel] ou [Hör90]. □

**Exemple 1.15.** L'identité  $\text{Id} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  correspond à la distribution  $\delta_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  donnée par :

$$\delta_{\mathfrak{D}}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x, x) dx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

En effet,

$$O_{\delta_{\mathfrak{D}}}(\psi)(\phi) = \delta_{\mathfrak{D}}(\phi \boxtimes \psi) dx = T_\psi(\phi),$$

c'est-à-dire que  $O_{\delta_{\mathfrak{D}}}(\psi) = T_\psi$ .

**Exemple 1.16.** L'opérateur  $x^\alpha D^\beta : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  correspond à la distribution tempérée  $x^\alpha D_x^\beta \delta_{\mathfrak{D}}(x, x')$ ,  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ , car

$$\begin{aligned} O_{x^\alpha D_x^\beta \delta_{\mathfrak{D}}}(\psi)(\phi) &= (x^\alpha D_x^\beta \delta_{\mathfrak{D}})(\phi(x)\psi(x')) = D_x^\beta \delta_{\mathfrak{D}}(x^\alpha \phi(x)\psi(x')) \\ &= \delta_{\mathfrak{D}}((-1)^{|\beta|} (D_x^\beta x^\alpha \phi(x))\psi(x')) = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\beta x^\alpha \phi(x))\psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) x^\alpha D^\beta \psi(x) dx, \quad \text{en intégrant par parties,} \\ &= T_{x^\alpha D^\beta \psi}(\phi). \end{aligned} \tag{1.15}$$

L'une des équations aux dérivées partielles les plus simples qu'on puisse considérer est sans doute

$$D_j u = 0 \quad \text{pour } u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (1.16)$$

où la dérivée est prise au sens des distributions. L'opération opposée est d'intégrer en  $x_j$ , soit l'opération  $I_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$  définie par

$$I_j \phi(y_1, \dots, y_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y_1, \dots, y_{j-1}, t, y_j, \dots, y_{n-1}) dt.$$

Soit aussi  $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  la projection donnée par  $\pi_j(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ . Pour  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$ , on pose alors  $\pi_j^* v(\phi) := v(I_j \phi)$  pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , de sorte que  $\pi_j^* v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemme 1.17.** *Une distribution tempérée  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est telle que  $D_j u = 0$  si et seulement si  $u = \pi_j^* v$  pour une certaine distribution  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$ .*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ ) Si  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est telle que  $\psi = D_j \phi$  pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$I_j(\psi) = I_j(D_j \phi) = 0$$

par le théorème fondamental du calcul, puisque que  $\phi$  décroît à l'infini. Maintenant, si  $u = \pi_j^* v$ , alors pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$D_j u(\phi) = u(-D_j \phi) = \pi_j^* v(-D_j \phi) = -v(I_j(D_j \phi)) = -v(0) = 0,$$

ce qui montre que  $D_j u = 0$  au sens des distributions.

$\Rightarrow$ ) On suppose maintenant que  $D_j u = 0$ . Soit  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  une fonction telle que  $\int_{\mathbb{R}} \rho dx = 1$ . Pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a alors que

$$\phi = \rho(x_j) I_j \phi + D_j \psi$$

pour une certaine fonction  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . En effet,  $\zeta = \phi - \rho(x_j) I_j \phi$  est telle que  $I_j(\zeta) = 0$ , donc on peut prendre

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x_j} \zeta(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) dt.$$

Comme  $D_j u = 0$ , on a donc que  $u(\phi) = u(\rho(x_j) I_j \phi)$ . En définissant  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$  par

$$v(\psi) = u(\rho(x_j) \psi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)),$$

on a donc que

$$\pi_j^* v(\phi) = v(I_j \phi) = u(\rho(x_j) I_j(\phi)) = u(\phi),$$

donc que  $u = \pi_j^* v$ . □

**Corollaire 1.18.** *Une distribution tempérée  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est telle que*

$$Du := (D_1 u, \dots, D_n u) = 0$$

*si et seulement si  $u$  correspond à une fonction constante.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le lemme précédent  $n$  fois.  $\square$

**Lemme 1.19.** Soit  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  une distribution tempérée telle que  $x_j u = 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Alors  $u = c\delta$  pour  $c \in \mathbb{C}$  une constante, où  $\delta$  est la distribution de Dirac.

*Démonstration.* Soit  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction à valeurs positives telle que  $\rho \equiv 1$  pour  $|x| < \frac{1}{2}$  et  $\rho \equiv 0$  pour  $|x| > 1$ . Montrons d'abord que toute fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est de la forme

$$\phi(x) = \phi(0)\rho(x) + \sum_{j=1}^n x_j \psi_j(x) \quad \text{avec } \psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.17)$$

Rappelons d'abord que par la formule de Taylor, on a  $\phi(x) = \phi(0) + \sum x_j \zeta_j(x)$  pour  $\zeta_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . En effet, on calcule que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \phi(tx) dt = \phi(0) + \int_0^1 \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(tx) x_j dt \\ &= \phi(0) + \sum_j x_j \zeta_j \quad \text{avec } \zeta_j = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(tx) dt. \end{aligned} \quad (1.18)$$

On a donc que  $\rho(x)\phi(x) = \rho(x)\phi(0) + \sum_j x_j(\zeta_j \rho)$  avec  $\zeta_j \rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pour la fonction  $(1 - \rho)\phi$ , on a d'autre part que

$$\zeta(x) := \frac{(1 - \rho(x))\phi(x)}{|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies (1 - \rho)\phi = |x|^2 \zeta(x) = \sum_j x_j (x_j \zeta(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On a donc bien que

$$\phi = \rho\phi + (1 - \rho)\phi = \rho\phi(0) + \sum_j x_j \psi_j \quad \text{avec } \psi_j = \rho\zeta_j + x_j \zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Grâce à cette propriété, on voit donc que pour  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  comme dans l'énoncé, on a que

$$\begin{aligned} u(\phi) &= u(\phi(0)\rho(x) + \sum_j x_j \psi_j) = \phi(0)u(\rho) + \sum_j u(x_j \psi_j) \\ &= \phi(0)u(\rho) + \sum_j x_j u(\psi_j) = u(\rho)\phi(0). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Comme  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  était quelconque, on voit donc que  $u = c\delta$  avec  $c = u(\rho)$ .  $\square$

### 1.3 Transformée de Fourier

Voici notre convention pour la définition de la transformée de Fourier.

**Définition 1.20.** La transformée de Fourier d'une fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est donnée par

$$\mathcal{F}(\phi)(\xi) = \hat{\phi}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposition 1.21.** *La transformée de Fourier induit une application linéaire continue*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\phi)(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} (1 + |x|^2)^n |\phi(x)| dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n} \right) (n + 1)^n \|\phi\|_{2n}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

ce qui montre que  $\mathcal{F}(\phi)$  est une fonction bornée. Remarquons aussi que

$$\begin{aligned} D_j \mathcal{F}(\phi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} D_{\xi_j} e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (-x_j) \phi(x) dx = -\mathcal{F}(x_j \phi)(\xi); \\ \xi_j \mathcal{F}(\phi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi_j e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} -D_{x_j} e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} D_{x_j} \phi(x) dx, \quad \text{en intégrant par parties,} \\ &= \mathcal{F}(D_j \phi)(\xi). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Par récurrence, on a donc plus généralement que  $\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}(\phi)(\xi) = (-1)^{|\beta|} \mathcal{F}(D^\alpha x^\beta \phi)(\xi)$ , d'où l'on déduit comme pour  $\phi$  que

$$|\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}(\phi)(\xi)| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n} \right) (n + 1)^n \|D^\alpha x^\beta \phi\|_{2n}, \quad (1.22)$$

c'est-à-dire que la fonction  $\xi^\alpha D^\beta \mathcal{F}(\phi)$  est bornée. Comme  $\alpha$  et  $\beta$  étaient des multi-indices quelconques, cela montre que  $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Par l'inégalité (1.22), on en déduit que pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ , il existe une constante  $C_k > 0$  telle que

$$\|\mathcal{F}(\phi)\|_k \leq C_k \|\phi\|_{2n+k},$$

ce qui montre que  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est bien une application linéaire continue. □

Dans la preuve précédente, nous avons notamment établi les formules suivantes :

$$F(D_j \phi) = \xi_j \mathcal{F}(\phi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(x_j \phi) = -D_j \mathcal{F}(\phi). \quad (1.23)$$

**Théorème 1.22.** *La transformée de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques avec inverse  $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  donné par*

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi.$$

*Démonstration.* Comme pour la transformée de Fourier, on peut vérifier que  $\mathcal{F}^{-1}$  est bien une application linéaire continue. La composée

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

est donc une application linéaire continue. Par le théorème du noyau de Schwartz, cette application possède un noyau  $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . En fait,  $K$  est donné explicitement par

$$K(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot \xi} e^{-ix \cdot \xi} \phi(y, x) dx d\xi dy, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_x^n).$$

En effet, pour  $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(\psi))(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{iy \cdot \xi}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \psi(x) dx d\xi dy = K(\phi(y)\psi(x)) = K(\phi \boxtimes \psi),$$

ce qui montre que  $K$  est bien le noyau de Schwartz de l'opérateur  $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$ . D'autre part, en intégrant par parties, on voit que pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} (D_{x_j} + D_{y_j})K(y, x) &= 0, \\ (y_j - x_j)K(y, x) &= 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Par le Lemme 1.17, la première équation implique que  $K(y, x) = K(y - x)$  en utilisant les coordonnées  $(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$ . Par le Lemme 1.19, on a alors que  $K = c\delta(y - x)$  pour une certaine constante  $c$ . Comme  $\delta(y - x)$  est le noyau de Schwartz de l'identité, on a donc que  $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = c \text{Id}$  pour une certaine constante  $c \in \mathbb{C}$ . Reste à montrer que  $c = 1$ . Il suffit pour ce faire d'appliquer le résultat de l'exercice supplémentaire 4 du Chapitre 1, à savoir

$$\mathcal{F}(e^{-|x|^2}) = e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \pi^{\frac{n}{2}}. \tag{1.25}$$

En effet, ce résultat nous permet de vérifier que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(e^{-|x|^2}) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \pi^{\frac{n}{2}}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} d\xi \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2x \cdot \eta} e^{-|\eta|^2} d\eta, \quad \text{en posant } \eta = \frac{\xi}{2}, \quad d\eta = \frac{d\xi}{2^n}, \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\pi^n} \left( e^{-\frac{|2x|^2}{4}} \pi^{\frac{n}{2}} \right) = e^{-|x|^2}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

ce qui montre que la constante  $c$  doit bien être égale à 1. □

Pour étendre la transformée de Fourier aux distributions tempérées, il est utile dans un premier temps d'introduire un produit scalaire  $L^2$  sur l'espace de Schwartz.

**Définition 1.23.** Le produit scalaire  $L^2$  de deux fonctions  $\psi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est défini par

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \overline{\phi(x)} dx.$$

Pour déterminer l'adjoint de la transformée de Fourier par rapport à ce produit scalaire  $L^2$ , on calcule que

$$\begin{aligned}
\langle \phi, \mathcal{F}(\psi) \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \overline{\mathcal{F}(\psi)(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi) \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \psi(x) dx} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \phi(\xi) e^{ix \cdot \xi} \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi \right) \overline{\psi(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\phi) \overline{\psi(x)} dx = \langle (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\phi), \psi \rangle_{L^2},
\end{aligned} \tag{1.27}$$

ce qui montre que l'adjoint de  $\mathcal{F}$  est donné par  $\mathcal{F}^* = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}$ .

**Définition 1.24.** On étend la définition de la transformée de Fourier aux distributions tempérées

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

en posant

$$\mathcal{F}(u)(\bar{\phi}) = u(\overline{\mathcal{F}^*(\phi)}) = u((2\pi)^n \overline{\mathcal{F}^{-1}(\phi)})$$

pour  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Autrement dit, on a que

$$\mathcal{F}(u)(\phi) = u((2\pi)^n \overline{\mathcal{F}^{-1}(\bar{\phi})}).$$

Outre l'espace de Schwartz, il y a aussi l'espace des fonctions de carré intégrable qui se comporte particulièrement bien lorsqu'on applique la transformée de Fourier.

**Définition 1.25.** L'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  est donné par

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ est mesurable et } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty\} / \sim,$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence  $f \sim g \iff f = g$  presque partout.

L'espace  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est un espace d'Hilbert avec produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

et norme

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}.$$

En particulier,  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est donc un espace vectoriel topologique complet et  $\|f\|_{L^2} = 0$  si et seulement si  $f = 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire si et seulement si  $f \sim 0$ .

**Proposition 1.26.** *L'espace des fonctions lisses à support compact  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  (et donc a fortiori l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ) est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  pour la topologie induite par la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$ .*

*Démonstration.* Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et soit  $\chi_R$  la fonction caractéristique de la boule fermée de rayon  $R$  centrée à l'origine :

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Alors on a que

$$\|\chi_R f - f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_R - 1)^2 |f|^2 dx = \int_{|x| \geq R} |f|^2 dx.$$

Comme  $f$  es de carré intégrable, le terme de droite tend vers zéro lorsque  $R \rightarrow \infty$ , donc  $f$  est approximée par une fonction  $\chi_R f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  à support compact. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  est à support compact. Soit maintenant  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction à valeurs positives telle que  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho dx = 1$ . Pour  $\epsilon > 0$ , considérons la fonction

$$\rho_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

On peut alors considérer le produit de convolution

$$\rho_\epsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x - y) f(y) dy.$$

Comme on suppose que  $f$  est à support compact, il en sera de même de  $\rho_\epsilon * f$ . Pour conclure la démonstration, il suffit alors de montrer que ce produit de convolution est lisse, c'est-à-dire que  $\rho_\epsilon * f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , et que

$$\|\rho_\epsilon * f\|_{L^2} \rightarrow 0$$

lorsque  $\epsilon \searrow 0$ . On réfère à [Bre05] pour cette partie. □

Une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  peut aussi être vue comme une distribution tempérée :

$$f(\psi) := T_f(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dx \quad \text{pour } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n).$$

Cette application  $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est en fait injective. En effet, soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\|f\|_{L^2} \neq 0$ . Par la Proposition 1.26, il existe une fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\|\phi - f\|_{L^2} < \frac{\|f\|_{L^2}}{2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |f(\bar{\phi})| &= |\langle f, \phi \rangle_{L^2}| = |\langle f, \phi - f + f \rangle| \geq \|f\|_{L^2}^2 - |\langle f, \phi - f \rangle_{L^2}| \\ &\geq \|f\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2} \|\phi - f\|_{L^2}, \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,} \\ &= \|f\|_{L^2} (\|f\|_{L^2} - \|\phi - f\|_{L^2}) \geq \frac{\|f\|_{L^2}^2}{2} > 0. \end{aligned} \tag{1.28}$$

En tant que distribution tempérée,  $f$  n'est donc pas nulle. Par le Lemme 1.9, on a donc une suite d'injections

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{1.29}$$



**Proposition 1.27.** *La transformée de Fourier s'étend par continuité en un isomorphisme*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

tel que  $\|\mathcal{F}(u)\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|u\|_{L^2}$ .

*Démonstration.* Pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a bien que

$$\|\mathcal{F}(\phi)\|_{L^2}^2 = \langle \mathcal{F}(\phi), \mathcal{F}(\phi) \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}^* \circ \mathcal{F}(\phi), \phi \rangle_{L^2} = (2\pi)^n \langle \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(\phi), \phi \rangle_{L^2} = (2\pi)^n \|\phi\|_{L^2}^2.$$

Comme  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , on en conclut que la transformée de Fourier

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

est bien définie avec

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^2}^2 = (2\pi)^n \|u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

□

## 1.4 Les opérateurs différentiels et la transformée de Fourier

Le calcul heuristique non-rigoureux  $\langle \mathcal{F}(\delta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \delta dx = e^{-i0 \cdot \xi} = 1 \rangle$  suggère que la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(\delta)$  de la distribution de Dirac devrait être la fonction constante égale à 1 partout. C'est effectivement le cas, puisque

$$\mathcal{F}(\delta)(\bar{\phi}) = \delta((2\pi)^n \overline{\mathcal{F}^{-1}(\bar{\phi})}) = \delta \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \phi(\xi) d\xi \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\phi}(\xi) d\xi = T_1(\bar{\phi}).$$

Comme  $\mathcal{F}(D^\alpha \phi) = \xi^\alpha \mathcal{F}(\phi)$ , on a donc que

$$\mathcal{F}(D^\alpha \delta) = \xi^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

C'est une manifestation du principe général suivant : La transformée de Fourier transforme les singularités en des manques de décroissance à l'infini et vice-versa.

**Définition 1.28.** Le **support** d'une distribution tempérée  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , dénoté  $\text{supp}(u)$ , est l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  n'admettant aucun voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  dans lequel  $u$  se restreint à zéro, c'est-à-dire tel que

$$u(\phi) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ avec } \text{supp}(\phi) \subset \mathcal{U}.$$

**Exemple 1.29.** Le support de la distribution de Dirac est  $\text{supp}(\delta) = \{0\}$ .

**Proposition 1.30.** Si  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est une distribution tempérée telle que  $\text{supp}(u) \subset \{0\}$ , alors  $u = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha D^\alpha \delta$  pour  $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}_0^n$  un sous-ensemble fini.

*Démonstration.* Soit  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction à valeurs positives telle que  $\rho \equiv 1$  pour  $|x| < 1$  et  $\rho \equiv 0$  pour  $|x| > 2$ . Posons  $\rho_\epsilon(x) = \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ . Alors  $D^\alpha \rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^{|\alpha|}}(D^\alpha \rho)\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$  a son support contenu dans la région où  $|x| \leq 2\epsilon$ . Ainsi, pour  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $|\alpha| = k + 1$ , on a que

$$\|(1 - \rho_\epsilon)x^\alpha \psi - x^\alpha \psi\|_k = \|\rho_\epsilon x^\alpha \psi\|_k \leq C_k \epsilon \|\psi\|_k$$

pour une constante  $C_k$  indépendante de  $\epsilon$  et  $\psi$ . Soit maintenant  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  une distribution tempérée dont le support est contenu dans  $\{0\}$ . Alors il existe  $k \in \mathbb{N}_0$  et une constante  $C > 0$  tels que

$$|u(\phi)| \leq C \|\phi\|_k \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, pour  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  avec  $|\alpha| = k + 1$ , on a par la discussion précédente que

$$\begin{aligned} |u(x^\alpha \phi)| &\leq |u(1 - \rho_\epsilon)x^\alpha \phi| + |u(\rho_\epsilon x^\alpha \phi)| \\ &= |u(\rho_\epsilon x^\alpha \phi)|, \quad \text{car } u((1 - \rho_\epsilon)x^\alpha \phi) = 0, \text{ puisque } \text{supp } u \subset \{0\}, \\ &\leq C \|\rho_\epsilon x^\alpha \phi\|_k \leq \epsilon C C_k \|\phi\|_k \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \epsilon \searrow 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Il faut donc que  $u(x^\alpha \phi) = 0$  pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire que  $x^\alpha u = 0$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  avec  $|\alpha| = k + 1$ . En utilisant le théorème de Taylor avec reste de Laplace, on a donc pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  que

$$\phi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{i^{|\alpha|} D^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} x^\alpha \psi_\alpha, \quad \psi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

où  $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$  pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . En utilisant cette formule, on calcule donc que

$$\begin{aligned} u(\phi) &= u\left(\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{i^{|\alpha|} D^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha \rho\right) + \sum_{|\alpha| = k+1} u(x^\alpha \psi_\alpha) + u(\phi(1 - \rho)) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{i^{|\alpha|} D^\alpha \phi(0)}{\alpha!} u(x^\alpha \rho). \end{aligned} \quad (1.31)$$

On a donc que  $u = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \delta$  avec  $c_\alpha = \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} u(x^\alpha \rho)$ . □

**Corollaire 1.31.** *La transformée de Fourier induit une bijection entre l'espace*

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(u) \subset \{0\}\}$$

*des distributions à support contenu dans  $\{0\}$  et l'espace  $\mathbb{C}[\xi] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$  des polynômes en  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .*

Cette observation est utile pour l'étude des opérateurs différentiels. Soit

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha$$

un opérateur différentiel ayant des coefficients  $c_\alpha$  constants. Cet opérateur définit alors une application linéaire continue

$$P(D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En termes de la transformée de Fourier, on a d'autre part que

$$\mathcal{F}(P(D)\phi) = P(\xi)\mathcal{F}(\phi) = P(\xi)\hat{\phi}(\xi), \quad \hat{\phi}(\xi) = \mathcal{F}(\phi)(\xi).$$

La composée  $\mathcal{F} \circ P(D) \circ \mathcal{F}^{-1}$  est donc simplement la multiplication par le polynôme  $P(\xi)$ . En d'autres termes

$$P(D)\phi(x) = \mathcal{F}^{-1}(P(\xi)(\hat{\phi})(\xi))(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} P(\xi)\phi(y)dyd\xi,$$

c'est-à-dire que le noyau de Schwartz de l'opérateur  $P(D)$  est donné par l'intégrale itérée

$$K_{P(D)}(\psi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} P(\xi)\psi(x, y)dyd\xi dyx$$

pour  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n)$ . Au sens des distributions, on a donc que

$$K_{P(D)} = \mathcal{F}^{-1}(P(\xi))(x - y) = (P(D)\delta)(x - y) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \delta(x - y) = P(D)\delta_{\mathfrak{D}}, \quad (1.32)$$

ce qui est en accord avec l'Exemple 1.16. Le noyau de Schwartz de  $P(D)$  est donc une somme de dérivées de la distribution  $\delta(y - x) = \delta_{\mathfrak{D}}$ , c'est-à-dire du noyau de Schwartz de l'opérateur identité. Son support est en particulier contenu dans la diagonale

$$\mathfrak{D} = \{(x, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Cette propriété est en accord avec le fait que  $P(D)$  est un opérateur local :

$$(P(D)\phi)|_{\mathcal{U}} = 0 \quad \text{si} \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ est telle que } \phi|_{\mathcal{U}} = 0$$

pour  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert.

**Exemple 1.32.** Considérons l'opérateur  $1 + \Delta = (1 + \sum_{j=1}^n D_j^2)$ . Alors  $\mathcal{F} \circ (1 + \Delta) \circ \mathcal{F}^{-1}$  correspond à la multiplication par  $(1 + |\xi|^2)$ . De ce point de vue, l'inverse  $(1 + \Delta)^{-1}$  de cet opérateur est bien défini et correspond à la multiplication par  $(1 + |\xi|^2)^{-1}$ . Le noyau de Schwartz correspondant à  $(1 + \Delta)^{-1}$  est donc au sens des distributions

$$K_{(1+\Delta)^{-1}}(x - y) = \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{-1})(x - y).$$

C'est la solution fondamentale de l'opérateur  $(1 + \Delta)$  au sens ou

$$(1 + \Delta)K_{(\Delta+1)^{-1}} = \delta(x - y).$$

On peut faire le même type d'argument avec le Laplacien  $\Delta = \sum_{j=1}^n D_j^2$ . Dans ce cas,  $\mathcal{F} \circ \Delta \circ \mathcal{F}^{-1}$  correspond à la multiplication par  $|\xi|^2$ . Pour  $n > 2$ , l'inverse, à savoir la multiplication par  $|\xi|^{-2}$ , a un sens en tant que distribution tempérée. Sa transformée de Fourier inverse est donc bien définie, ce qui donne le noyau de Schwartz

$$K_{\Delta^{-1}}(x - y) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2})(x - y).$$

À nouveau, c'est la solution fondamentale du Laplacien, à savoir telle que

$$\Delta K_{\Delta^{-1}}(x - y) = \delta(x - y). \quad (1.33)$$

Cette solution, aussi appelée fonction de Green, est bien connue.

**Exercice 1.33.** À partir de l'équation (1.33), montrer par un calcul direct que pour  $n > 2$ ,

$$K_{\Delta^{-1}} = -\frac{|x - y|^{2-n}}{c_n(n-2)}$$

au sens des distributions, où  $c_n$  est le volume de la sphère unité de dimension  $n - 1$ . Pour  $n = 2$ , montrer que la solution fondamentale (ou fonction de Green) est plutôt donnée par

$$K_{\Delta^{-1}} = \frac{1}{2\pi} \log |x - y|.$$

Dans cet exemple, remarquons que, même si le noyau de Schwartz  $K_{\Delta}$  du Laplacien est supporté sur la diagonale, il n'en est rien pour le noyau de Schwartz  $K_{\Delta^{-1}}$ . L'opérateur correspondant n'est donc pas local. Toutefois, en dehors de la diagonale, la distribution  $K_{\Delta^{-1}}$  est lisse. Dans le prochain chapitre, l'objectif sera d'introduire les opérateurs pseudodifférentiels, une classe d'opérateurs contenant les opérateurs différentiels, mais aussi des opérateurs comme  $\Delta^{-1}$ .

## 1.5 Exercices supplémentaires

1. Montrer que la fonction  $u(x) = e^x \cos(e^x)$  est une distribution tempérée.
2. Montrer qu'une suite  $\{\phi_n\}$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est de Cauchy, respectivement converge vers  $\phi$ , par rapport à la métrique  $d$  de (1.6) si et seulement si  $\{\phi_n\}$  est de Cauchy, respectivement converge vers  $\phi$ , par rapport à chaque norme  $\|\cdot\|_k$ .
3. En utilisant le problème précédent, montrer que l'espace métrique  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$  est complet, c'est-à-dire que chaque suite de Cauchy converge.
4. Calculer la transformée de Fourier de  $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . En dimension 1, une manière de procéder est d'utiliser l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-x^2} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int e^{-(x + \frac{i}{2}\xi)^2} dx$$

et d'appliquer le théorème des résidus à un contour judicieusement choisi dans le plan complexe.

5. Montrer que les définitions du support pour  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  sont compatibles avec l'inclusion  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

## 2 Opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbb{R}^n$

Avant d'introduire les opérateurs pseudodifférentiels proprement dit, on doit dans un premier temps élargir l'espace des polynômes  $\mathbb{C}[\xi]$  en un espace de fonctions qu'on appellera symboles.

### 2.1 L'espace des symboles

L'Exemple 1.32 suggère que l'espace des symboles devrait inclure des fonctions comme  $(1+|\xi|^2)^{-1}$ . Si on veut pouvoir inclure des opérateurs différentiels à coefficients non-constants, il faut aussi permettre une dépendance en  $x$ , pas seulement en  $\xi$ . Enfin, tout comme pour les polynômes, il est souhaitable que les symboles aient une notion d'ordre qui les filtre. La définition suivante répond à toutes ces exigences.

**Définition 2.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . L'espace  $\mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$  des **symboles d'ordre**  $m \in \mathbb{R}$  est constitué des fonctions  $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  satisfaisant, pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ , à l'estimation

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}, \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

pour une constante  $C_{\alpha, \beta}$  dépendant de  $\alpha, \beta$  et  $a$ .

**Exemple 2.2.** Si  $P(\xi) = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta \xi^\beta$  est un polynôme d'ordre  $m$ , alors  $P \in \mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Plus généralement,  $P$  demeure dans cette classe si les coefficients  $c_\beta$  sont remplacés par des fonctions  $f_\beta \in C^\infty(\Omega)$  qui sont bornées, ainsi que toutes leurs dérivées.

Les estimations (2.1) peuvent être reformulées en termes de normes :

$$\|a\|_{N, m} := \sup_{x \in \Omega} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha| + |\beta| \leq N} (1 + |\xi|)^{-m + |\beta|} |D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi)| < \infty. \quad (2.2)$$

Muni de ces normes,  $\mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$  est un espace de Fréchet et sa topologie est induite par la métrique

$$d(a, b) = \sum_{N \geq 0} \frac{1}{2^N} \frac{\|a - b\|_{N, m}}{1 + \|a - b\|_{N, m}}, \quad a, b \in \mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Remarquons qu'il y a une inclusion naturelle  $\mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}_\infty^{m'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  pour  $m' \geq m$ , puisque

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{(1 + |\xi|)^m}{(1 + |\xi|)^{m'}} \right) < \infty \iff m' \geq m. \quad (2.3)$$

On vérifie aisément à l'aide de l'estimation (2.3) que cette inclusion est continue. On pose donc :

$$\mathcal{S}_\infty^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) = \bigcup_m \mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) = \bigcap_m \mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n). \quad (2.4)$$

**Proposition 2.3.** L'espace  $\mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$  lorsqu'on utilise la topologie induite par  $\mathcal{S}_\infty^{m'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  pour  $m' > m$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction prenant ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  telle que  $\varphi \equiv 1$  pour  $|\xi| < 1$  et  $\varphi \equiv 0$  pour  $|\xi| > 2$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , posons  $\varphi_k(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{k})$ . Pour  $a \in \mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , on peut alors considérer la suite de fonctions

$$a_k(x, \xi) = \varphi_k(\xi)a(x, \xi), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Clairement, on a que  $a_k \in \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Il suffit donc de montrer que  $a_k \rightarrow a$  dans la topologie de  $\mathcal{S}_\infty^{m'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Comme  $a_k - a = (\varphi_k - 1)a$  a son support contenu dans la région où  $|\xi| \geq k$ , on a que :

$$\begin{aligned} \|a_k - a\|_{0, m'} &= \sup_{x, \xi} (1 + |\xi|)^{-m'} |a_k(x, \xi) - a(x, \xi)| \\ &\leq \sup_{x, \xi} (1 + k)^{-(m' - m)} (1 + |\xi|)^{-m} |a| \\ &\leq \frac{\|a\|_{0, m}}{(1 + k)^{m' - m}} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Plus généralement, comme

$$\left| D_\xi^\beta \left( \varphi \left( \frac{\xi}{k} \right) \right) \right| = \left| \frac{1}{k^{|\beta|}} (D^\beta \varphi) \left( \frac{\xi}{k} \right) \right| \leq \frac{C_\beta}{k^{|\beta|}}$$

pour une constante  $C_\beta$  et que

$$\text{supp}(D^\beta(\varphi_k - 1)) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid k \leq |\xi| \leq 2k\} \quad \text{pour } |\beta| \geq 1,$$

on voit par un raisonnement similaire et en employant la règle de Leibniz qu'il existe une constante  $C_N$  telle que

$$\|a_k - a\|_{N, m'} = \|(\varphi_k - 1)a\|_{N, m'} \leq \frac{C_N}{(1 + k)^{m' - m}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty,$$

d'où le résultat. □

**Remarque 2.4.** L'espace  $\mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  n'est pas dense dans  $\mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$  pour sa topologie usuelle. Par exemple, la fonction constante  $1 \in \mathcal{S}_\infty^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$  est telle que

$$\|a - 1\|_{0, n} \geq 1$$

pour tout  $a \in \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , puisque  $|a(x, \xi)| \rightarrow 0$  lorsque  $|\xi| \rightarrow 0$ .

L'espace des symboles satisfait aussi aux propriétés suivantes.

**Proposition 2.5.** *La multiplication de deux symboles d'ordre  $m$  et  $m'$  induit une application bilinéaire continue*

$$\mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}_\infty^{m'}(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_\infty^{m+m'}(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

*De même, la différentiation en  $x$  et en  $\xi$  induit des applications linéaires continues*

$$D_x^\alpha : \mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad D_\xi^\beta : \mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_\infty^{m-|\beta|}(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* La première assertion se démontre en utilisant la règle de Leibniz. Les deux autres assertions sont des conséquences directes de la définition de l'espace  $\mathcal{S}_\infty^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . □

## 2.2 Les opérateurs pseudodifférentiels

Pour une fonction  $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$  adéquate, on peut définir un opérateur par

$$(A(x, D)\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi) \phi(y) dy d\xi, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2.6)$$

Plus précisément, pour  $m, w \in \mathbb{R}$ , les fonctions adéquates qu'on considérera seront de la forme

$$a(x, y, \xi) = (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \tilde{a}(x, y, \xi), \quad \tilde{a} \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}_{(x,y)}^{2n}; \mathbb{R}_\xi^n),$$

c'est-à-dire que

$$a \in (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}_{(x,y)}^{2n}; \mathbb{R}_\xi^n). \quad (2.7)$$

**Remarque 2.6.** Le facteur  $(1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}}$  n'est pas à proprement dit essentiel, mais il sera fort utile dans la preuve du théorème de réduction, à savoir le Théorème 2.12 plus loin dans le texte.

**Exercice 2.7.** Vérifier que l'équation (2.7) équivaut à ce que

$$\sup_{x,y,\xi} (1 + |x - y|^2)^{-\frac{w}{2}} (1 + |\xi|)^{-m+|\gamma|} |D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| < \infty$$

pour tout  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ .

**Lemme 2.8.** Pour  $m < -n$ , l'intégrale (2.6) est absolument convergente et définit une application

$$A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (1 + |x|^2)^{\frac{w}{2}} L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.8)$$

*Démonstration.* Par l'inégalité du triangle, on a que  $(1 + |x - y|) \leq (1 + |x|)(1 + |y|)$ . Ainsi, pour  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $w \geq 0$  et  $N \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $C_{N,w}$  telle que

$$\begin{aligned} |a(x, y, \xi)u(y)| &\leq C_{N,w} (1 + |x - y|)^w (1 + |\xi|)^m (1 + |y|)^{-N}, \quad \text{en utilisant que } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \\ &\leq C_{N,w} (1 + |x|)^w (1 + |y|)^{w-N} (1 + |\xi|)^m \\ &\leq C_{N,w} (1 + |x|)^w (1 + |y|)^m (1 + |\xi|)^m, \quad \text{lorsque } N \geq w - m. \end{aligned} \quad (2.9)$$

De même, en utilisant l'inégalité  $(1 + |x|) \leq (1 + |x - y|)(1 + |y|)$ , on voit que pour  $w \leq 0$  et  $N \geq -m - w$ , il existe une constante  $C_{N,w}$  telle que

$$\begin{aligned} |a(x, y, \xi)u(y)| &\leq C_{N,w} (1 + |x - y|)^w (1 + |\xi|)^m (1 + |y|)^{-N}, \\ &\leq C_{N,w} \left( \frac{1 + |x|}{1 + |y|} \right)^w (1 + |\xi|)^m (1 + |y|)^{-N}, \\ &\leq C_{N,w} (1 + |x|)^w (1 + |y|)^m (1 + |\xi|)^m, \quad \text{car } N \geq -m - w. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dans les deux cas, on voit que pour  $m < -n$ , l'intégrale est absolument convergente, de sorte qu'on a bien une application

$$A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (1 + |x|^2)^{\frac{w}{2}} L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

□

**Proposition 2.9.** *L'application*

$$(1+|x-y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n) \ni a \mapsto I(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi) d\xi \in (1+|x-y|^2)^{\frac{w}{2}} L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$$

définie pour  $m < -n$  s'étend pour chaque  $m \in \mathbb{R}$  en une application

$$I : (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$$

par continuité par rapport à la topologie de  $(1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  pour  $m' > m$ .

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  par rapport à la topologie induite par celle de  $\mathcal{S}_\infty^{m'}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  pour  $m' > m$ , il suffit, pour  $a = (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \tilde{a}$  avec  $\tilde{a} \in \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ , d'établir l'estimation

$$|I(a)(\phi)| \leq C \|\tilde{a}\|_{N, m'} \|\phi\|_k \quad (2.11)$$

pour certains  $N, k \in \mathbb{N}$  et une constante positive  $C$ . L'ingrédient principal qui nous permettra d'obtenir cette estimation est l'intégration par parties. Remarquons d'abord que

$$(1 - \xi \cdot D_y) e^{i(x-y)\cdot\xi} = (1 + |\xi|^2) e^{i(x-y)\cdot\xi}.$$

En posant  $\tilde{\phi} = (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \phi$ , cela donne

$$\begin{aligned} I(a)(\phi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, y, \xi) \phi(x, y) dy d\xi dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^q} (1 + \xi \cdot D_y)^q (\tilde{a}(x, y, \xi)) \tilde{\phi}(x, y) dy d\xi dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} \sum_{|\gamma| \leq q} \tilde{a}_\gamma D_y^\gamma \tilde{\phi}(x, y) dy d\xi dx, \quad \text{en appliquant la règle de Leibniz,} \end{aligned} \quad (2.12)$$

où

$$\tilde{a}_\gamma = \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^q} \sum_{|\mu| \leq q - |\gamma|} C_{\mu, \gamma} \xi^{\gamma + \mu} D_y^\mu \tilde{a}$$

pour des constantes  $C_{\mu, \gamma}$  ne dépendant que de  $q$  et des multi-indices  $\mu$  et  $\gamma$ . En particulier, on a que pour tout  $m' \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C_{N, \gamma, m', q}$  telle que

$$\|\tilde{a}_\gamma\|_{N, m' - q} \leq C_{N, \gamma, m', q} \|\tilde{a}\|_{N + q - |\gamma|, m'}.$$

Pour  $m' > m$  fixé et  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $q > m' + n + 1$ , on a donc que

$$\begin{aligned} |I(a)(\phi)| &\leq C \sum_{|\gamma| \leq q} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \|\tilde{a}_\gamma\|_{0, m' - q} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \|\tilde{\phi}\|_{2n+1+q} (1 + |x|^2 + |y|^2)^{-\frac{2n+1}{2}} dy d\xi dx \\ &\leq \tilde{C} \|\tilde{a}\|_{q, m'} \|\phi\|_{2n+1+q+k} \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } k > w, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ce qui donne l'estimation voulue.  $\square$



**Lemme 2.10.** *Pour  $a \in (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ , l'opérateur  $A$  associé au noyau de Schwartz  $I(a) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  induit une application linéaire continue*

$$A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* Il suffit d'obtenir des estimations de la forme

$$\|A\phi\|_k \leq C_k \|\tilde{a}\|_{N,m'} \|\phi\|_{k'} \quad (2.14)$$

pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $m' > m$ ,  $\tilde{a} = (1 + |x - y|^2)^{-\frac{w}{2}} a \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ . Par densité de  $\mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  pour la topologie induite par celle de  $\mathcal{S}_\infty^{m'}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ , on peut supposer que  $\tilde{a} \in \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ , ce qui va nous permettre d'intégrer par parties. Comme dans l'argument précédent, on a que

$$\begin{aligned} |A\phi(x)| &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} (1 + |\xi|^2)^{-q} (1 + \xi \cdot D_y)^q (a(x, y, \xi)\phi(y)) dy d\xi \right| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} \left( \sum_{|\gamma| \leq q} a_\gamma(x, y, \xi) D_y^\gamma \phi(y) \right) dy d\xi \right|, \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec  $a_\gamma = \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^q} \sum_{|\mu| \leq q - |\gamma|} c_{\mu,\gamma} \xi^{\gamma+\mu} D_y^\mu a \in (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ . En fait, il découle de la définition que

$$\|(1 + |x - y|^2)^{-\frac{w}{2}} a_\gamma\|_{0,m'-q} \leq C_\gamma \|\tilde{a}\|_{q,m'}$$

pour une constante  $C_\gamma$ . On déduit donc de l'équation (2.15) que

$$|A\phi(x)| \leq C_q \|\tilde{a}\|_{q,m'} \|\phi\|_{q+n+1+k} \left| \int (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} (1 + |y|^2)^{-\frac{n+1+k}{2}} (1 + |\xi|^2)^{m'-q} dy d\xi \right|. \quad (2.16)$$

Puisqu'il vient

$$(1 + |x - y|^2) \leq C(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)$$

pour une certaine constante  $C$  en utilisant l'inégalité du triangle, et donc aussi

$$(1 + |x|^2) \leq C(1 + |x - y|^2)(1 + |y|^2),$$

on a donc une constante  $C_{q,k}$  telle que

$$|A\phi(x)| \leq C_{q,k} (1 + |x|^2)^{\frac{w}{2}} \|\tilde{a}\|_{q,m'} \|\phi\|_{q+n+1+k} \quad (2.17)$$

pour  $q > 0$  tel que  $m' - q < -n$  et  $k > |w|$ . On en déduit que l'opérateur  $A$  induit une application linéaire continue

$$A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow (1 + |x|^2)^{\frac{w}{2}} L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Plus généralement, en intégrant par parties, on a que

$$\begin{aligned} x_j A\phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} (-D_{\xi_j} + y_j)(a(x, y, \xi)\phi(y)) dy d\xi, \\ D_{x_j} A\phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} (D_{x_j} + \xi_j)(a(x, y, \xi)\phi(y)) dy d\xi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Comme  $\|\xi_j \tilde{a}\|_{N, m'+1} \leq C\|\tilde{a}\|_{N, m'}$ ,  $\|D_{\xi_j} \tilde{a}\|_{N, m'-1} \leq \|\tilde{a}\|_{N+1, m'}$ ,  $\|D_{x_j} \tilde{a}\|_{N, m'} \leq \|\tilde{a}\|_{N+1, m'}$  et  $\|y_j \phi(y)\|_k \leq \|\phi\|_{k+1}$ , on peut procéder par récurrence pour montrer comme dans l'argument précédent que

$$|x^\alpha D_x^\beta A\phi(x)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |x|^2)^{\frac{w}{2}} \|\tilde{a}\|_{N, m'} \|\phi\|_k$$

pour  $m' > m$  fixé et  $N, k$  dépendant de  $\alpha$  et  $\beta$ . Les estimations voulues en découlent.  $\square$

**Définition 2.11.** On dénote par  $\Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  l'espace des opérateurs linéaires continus

$$A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

avec noyau de Schwartz  $I(a)$  pour un certain symbole  $a \in (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  avec  $w \in \mathbb{R}$ . C'est l'espace des **opérateurs pseudodifférentiels d'ordre  $m$**  sur  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.3 Composition

On voudrait montrer que, tout comme les opérateurs différentiels, les opérateurs pseudodifférentiels ont de bonnes propriétés de composition, à savoir que

$$\Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \circ \Psi_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n) \subset \Psi_\infty^{m+m'}(\mathbb{R}^n).$$

La preuve usuelle de la composition se fait à l'aide du lemme des phases stationnaires, qui donne le développement asymptotique de

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x)} \psi(x) dx \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow +\infty$$

pour  $\varphi$  une fonction de Morse. Nous allons plutôt suivre l'approche de Melrose [Mel] basée sur le théorème de réduction suivant.

**Théorème 2.12 (Réduction).** *Chaque  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  peut s'écrire comme  $I(a)$  pour un unique symbole  $a \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$ .*

**Corollaire 2.13.** *On a un isomorphisme d'espaces vectoriel  $\Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$ .*

Intuitivement, ce corollaire indique que la transformée de Fourier induit une correspondance entre l'espace des symboles  $\mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$  et l'espace des opérateurs pseudodifférentiels  $\Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ . En physique, cela donne une manière de passer de la mécanique classique (les symboles) à la mécanique quantiques (les opérateurs). Pour cette raison, une manière d'obtenir un opérateur à l'aide d'un symbole est appelée quantification.

Pour en revenir au théorème de réduction, celui-ci permet de donner une démonstration assez élégante de la composition. Déterminons d'abord quel est l'adjoint d'un opérateur pseudodifférentiel par rapport au produit scalaire  $L^2$  de la Définition 1.23. Si  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est un opérateur linéaire continu, son adjoint est l'opérateur linéaire continu

$$A^* : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

tel que

$$\langle A^* \psi, \phi \rangle_{L^2} = \langle \psi, A\phi \rangle_{L^2}, \quad \forall \psi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Autrement dit, pour  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , on définit l'adjoint par

$$A^* u(\bar{\phi}) = u(\overline{A\phi}), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En termes des noyaux des Schwartz  $K_A$  et  $K_{A^*}$  de  $A$  et  $A^*$ , on a donc que

$$K_{A^*}(\bar{\psi} \boxtimes \phi) = (A^* \phi)(\bar{\psi}) = T_\phi(\overline{A\psi}) = \overline{K_A(\phi \boxtimes \bar{\psi})}, \quad (2.19)$$

où le conjugué complexe d'une distribution tempérée  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est défini par  $\bar{u}(\phi) = \overline{u(\bar{\phi})}$  pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Lorsque  $K_A$  est une fonction, l'équation (2.14) revient à dire que

$$K_{A^*}(x, y) = \overline{K_A(y, x)},$$

ce qui n'est pas sans rappeler la formule usuelle  $a_{kl}^* = \bar{a}_{lk}$  pour l'adjoint d'une matrice. Si  $\mathcal{I} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  est l'involution interchangeant  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{I}(x, y) = (y, x)$ , alors l'équation (2.19) est aussi équivalente à

$$K_{A^*} = \mathcal{I}^* \overline{K_A} \quad (2.20)$$

où  $\mathcal{I}^* \overline{K_A}(\psi) = \overline{K_A(\psi \circ \mathcal{I}^{-1})} = \overline{K_A(\psi \circ \mathcal{I})}$ . Lorsque que  $K_A = I(a)$  est le noyau de Schwartz associé à un symbole  $a \in (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n})$ , on a donc que  $K_{A^*} = I(\mathcal{I}^* \bar{a})$ , c'est-à-dire que

$$K_A = I(a(x, y, \xi)) \implies K_{A^*} = I(\bar{a}(y, x, \xi)).$$

**Théorème 2.14** (Composition). *La composition d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre  $m$  et  $m'$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $m + m'$  :*

$$\Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \circ \Psi_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n) \subset \Psi_\infty^{m+m'}(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* Soient  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  et  $B \in \Psi_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n)$  donnés. Par le théorème de réduction,

$$A = I(a), \quad B^* = I(b), \quad B = I(\bar{b}(y, \xi))$$

avec  $a \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$  et  $b \in \mathcal{S}_\infty^{m'}(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$ . Ainsi, pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$B\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} \bar{b}(y, \xi) dy d\xi,$$

ce qui implique que

$$\widehat{B\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} \bar{b}(y, \xi) dy.$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} A \circ B\phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{B\phi}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} \overline{\bar{b}(y, \xi)} \phi(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) \bar{b}(y, \xi) \phi(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

On en déduit que  $A \circ B = I(c)$  avec  $c(x, y, \xi) = a(x, \xi) \bar{b}(y, \xi) \in \mathcal{S}_{\infty}^{m+m'}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ , ce qui montre que  $A \circ B \in \Psi_{\infty}^{m+m'}(\mathbb{R}^n)$ . □

Il reste maintenant à donner une preuve du Théorème 2.12 pour compléter la démonstration du théorème de composition.

## 2.4 Réduction et sommes asymptotiques

Soit  $a \in (1 + |x - y|^2)^{\frac{w}{2}} \mathcal{S}_{\infty}^m(\mathbb{R}_{(x,y)}^{2n}; \mathbb{R}_{\xi}^n)$  un symbole d'ordre  $m$ . Alors en intégrant par parties, opération qui est justifiée par la densité de  $\mathcal{S}_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}_{(x,y)}^{2n}; \mathbb{R}_{\xi}^n)$ , on a que :

$$I(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, y, \xi) d\xi \implies I((x_j - y_j)a) = I(-D_{\xi_j} a). \quad (2.22)$$

Or,  $-D_{\xi_j} a$  est d'ordre  $m-1$ , donc même si  $(x_j - y_j)a(x, y, \xi)$  est d'ordre  $m$ , comme opérateur,  $I((x_j - y_j)a)$  peut être vu comme un opérateur d'ordre  $m-1$ . Cette observation nous permet dans un premier temps de nous ramener au cas où  $w = 0$ . En effet, en prenant  $N \in \mathbb{N}_0$  tel que  $N \geq w$ , on a que  $a = (1 + |x - y|^2)^N \tilde{a}$  pour un certain  $\tilde{a} \in \mathcal{S}_{\infty}^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ , et donc par (2.22) que

$$I(a) = I((1 + \Delta_{\xi})^N \tilde{a}) \quad \text{avec} \quad (1 + \Delta_{\xi})^N \tilde{a} \in \mathcal{S}_{\infty}^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n),$$

où  $\Delta_{\xi} = \sum_{j=1}^n D_{\xi_j}^2$ . Sans perte de généralité, on peut donc supposer que  $a \in \mathcal{S}_{\infty}^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ . Considérons alors la série de Taylor autour de la diagonale  $x = y$ ,

$$a(x, y, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} (x - y)^{\alpha} (D_y^{\alpha} a)(x, x, \xi) + \sum_{|\alpha|=N} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} (x - y)^{\alpha} R_{N,\alpha}(x, y, \xi) \quad (2.23)$$

avec reste de Laplace

$$R_{N,\alpha} = \int_0^1 (1-t)^{N-1} (D_y^{\alpha} a)(x, (1-t)x + ty, \xi) dt.$$

**Exercice 2.15.** Établir la formule de Taylor (2.23) par induction en intégrant par parties dans le reste de Laplace.

En termes d'opérateurs pseudodifférentiels, on a donc que

$$A = \sum_{j=0}^{N-1} A_j + R_N, \quad R_N \in \Psi_\infty^{m-N}(\mathbb{R}^n), \quad A_j = I \left( \sum_{|\alpha|=j} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_y^\alpha D_\xi^\alpha a(x, x, \xi) \right) \in \Psi_\infty^{m-j}(\mathbb{R}^n). \quad (2.24)$$

Pour obtenir un résultat, il faut pouvoir donner un sens à cette somme lorsque  $N = \infty$ . Or, pour  $a_j \in \mathcal{S}_\infty^{m-j}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$  une suite de symboles, la série  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  n'a aucune raison a priori de converger. Cependant, on peut la sommer asymptotiquement au sens suivant.

**Définition 2.16.** On dit que la série  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z, \xi)$  **converge asymptotiquement** s'il existe un symbole  $a \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$  tel que

$$\left( a - \sum_{j=0}^{N-1} a_j \right) \in \mathcal{S}_\infty^{m-N}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (2.25)$$

Dans ce cas, on écrit  $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ .

**Proposition 2.17.** Toute série  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  avec  $a_j \in \mathcal{S}_\infty^{m-j}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$  converge asymptotiquement et la somme asymptotique est bien définie à un élément de  $\mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$  près.

*Démonstration.* L'unicité de la somme asymptotique est facile à démontrer. Si  $a$  et  $a'$  sont tels que  $a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sim a'$ , alors

$$a - \sum_{j=0}^{N-1} a_j \in \mathcal{S}_\infty^{m-N}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad a' - \sum_{j=0}^{N-1} a_j \in \mathcal{S}_\infty^{m-N}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n),$$

donc

$$a - a' = \left( a - \sum_{j=0}^{N-1} a_j \in \mathcal{S}_\infty^{m-N}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n) \right) - \left( a' - \sum_{j=0}^{N-1} a_j \in \mathcal{S}_\infty^{m-N}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n) \right) \in \mathcal{S}_\infty^{m-N}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n).$$

Comme  $N \in \mathbb{N}$  était quelconque, on a donc que

$$a - a' \in \bigcap_k \mathcal{S}_\infty^k(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n).$$

L'existence d'une somme asymptotique est plus difficile à démontrer. Nous utiliserons la méthode de Borel. Soit  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  telle que  $\rho(\xi) = 0$  pour  $|\xi| \leq 1$  et  $\rho = 1$  pour  $|\xi| \geq 2$ . Soit  $\{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante à préciser telle que  $\epsilon_j > 0$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon_j = 0$ . Comme candidat pour notre somme asymptotique, on pose alors

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} \rho(\epsilon_j \xi) a_j(z, \xi).$$

Puisque  $\rho(\epsilon_j \xi) = 0$  pour  $|\xi| \leq \frac{1}{\epsilon_j}$ , cette somme ne contient qu'un nombre fini de termes non-nuls dans la boule de rayon  $R > 0$ , à savoir

$$\mathbb{B}_R = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| < R\}.$$

On voit donc que  $a$  est bien défini en tant que fonction lisse. Pour voir que  $a \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ , il faut estimer les normes  $\|\cdot\|_{N,m}$  de chaque terme de la somme. Pour  $N = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\rho(\epsilon_j \xi) a_j\|_{0,m} &= \sup_{z,\xi} (1 + |\xi|)^{-m} |\rho(\epsilon_j \xi) a_j(z, \xi)| \\ &= \sup_{(z,\xi)} (1 + |\xi|)^{-j} \rho(\epsilon_j \xi) (1 + |\xi|)^{-(m-j)} |a_j(z, \xi)| \\ &\leq \|a_j\|_{0,m-j} \left(1 + \frac{1}{\epsilon_j}\right)^{-j}, \quad \text{car } |\xi| \geq \frac{1}{\epsilon_j} \text{ sur le support de } \rho(\epsilon_j \xi). \\ &= \|a_j\|_{0,m-j} \left(\frac{\epsilon_j}{1 + \epsilon_j}\right)^j \leq \|a_j\|_{0,m-j} \epsilon_j^j. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Pour les normes avec  $N > 0$ , la règle de Leibniz donne l'estimation

$$\begin{aligned} \sup_{(z,\xi)} (1 + |\xi|)^{-m+|\beta|} |D_z^\alpha D_\xi^\beta (a_j(z, \xi) \rho(\epsilon_j \xi))| &\leq \\ \sum_{|\mu| \leq |\beta|} C_\mu (1 + |\xi|)^{-m+j+|\mu|} |D_z^\alpha D_\xi^\mu a_j(z, \xi)| (1 + |\xi|)^{-j+|\beta|-|\mu|} \epsilon_j^{|\beta|-|\mu|} |(D^{\beta-\mu} \rho)(\epsilon_j \xi)|. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Pour  $\mu = \beta$ , on peut procéder comme dans le cas  $N = 0$  pour obtenir une estimation. Pour  $\mu < \beta$ , remarquons que  $(D^{\beta-\mu} \rho)(\epsilon_j \xi)$  a son support contenu dans la région où  $\frac{1}{\epsilon_j} \leq |\xi| \leq \frac{2}{\epsilon_j}$ . Dans cette région, on a donc que

$$\frac{1}{1 + |\xi|} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{\epsilon_j}} = \frac{\epsilon_j}{1 + \epsilon_j} \leq \epsilon_j, \tag{2.28}$$

$$1 + |\xi| \leq 1 + \frac{2}{\epsilon_j} = \frac{\epsilon_j + 2}{\epsilon_j} \leq \frac{3}{\epsilon_j}, \quad \text{pourvu que } \epsilon_j \leq 1 \forall j. \tag{2.29}$$

On en déduit qu'il existe une constante  $C_{-j+|\beta|-|\mu|}$  telle que

$$(1 + |\xi|)^{-j+|\beta|-|\mu|} \leq C_{-j+|\beta|-|\mu|} \epsilon_j^{j-|\beta|+|\mu|}.$$

On obtient ainsi une estimation de la forme

$$\|\rho(\epsilon_j \xi) a_j(z, \xi)\|_{N,m} \leq C_{j,N,m} \|a_j\|_{N,m-j} \epsilon_j^j$$

pour une constante  $C_{j,N,m}$  ne dépendant pas de  $\epsilon_j$ .

En commençant avec  $N = 0$ , on peut grâce à ces estimations extraire une sous-suite  $\{\epsilon_{0,j}\}$  de  $\{\epsilon_j\}$  telle que

$$\|\rho(\epsilon_{0,j} \xi) a_j(x, \xi)\|_{0,m} \leq \frac{1}{j^2}.$$

En continuant sur cette lancée, on peut construire une suite de sous-suites  $\{\epsilon_{N,j}\}$  telle que

$$\|\rho(\epsilon_{N,j}\xi)a(z, \xi)\|_{N,m} \leq \frac{1}{j^2}.$$

En prenant la sous-suite diagonale  $\delta_j := \epsilon_{j,j}$ , on a alors que

$$a(z, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho(\delta_j \xi) a_j(z, \xi)$$

converge par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{N,m}$  pour tout  $N \in \mathbb{N}_0$ . En utilisant un argument similaire et en utilisant à nouveau un argument de diagonalisation, on peut aussi supposer que

$$\sum_{j \geq k} \rho(\delta_j \xi) a_j(z, \xi)$$

converge par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{N,m-k}$  pour tout  $N \in \mathbb{N}_0$  et tout  $k \in \mathbb{N}_0$ . Cela montre qu'en prenant  $\epsilon_j = \delta_j$ , le symbole  $a(z, \xi)$  satisfait à toutes les propriétés requises.  $\square$

De retour à la somme (2.24), on peut utiliser la Proposition 2.17 pour obtenir un symbole  $b \in \mathcal{S}_{\infty}^m(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_{\xi}^n)$  avec

$$b \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi), \quad a_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_y^{\alpha} D_{\xi}^{\alpha} a)(x, x, \xi) \in \mathcal{S}_{\infty}^{m-j}(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_{\xi}^n). \quad (2.30)$$

Soit  $B$  l'opérateur correspondant au noyau de Schwartz associé  $I(b)$ . Alors

$$B - A = B - \sum_{j=0}^{N-1} A_j - R_N = \left( B - \sum_{j=0}^{N-1} A_j \right) - R_N$$

et par construction,  $R_N \in \Psi_{\infty}^{m-N}(\mathbb{R}^n)$  alors que  $B - \sum_{j=0}^{N-1} A_j$  a pour symbole

$$b - \sum_{j=0}^{N-1} a_j \in \mathcal{S}_{\infty}^{m-N}(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_{\xi}^n).$$

On en déduit que  $B - A \in \Psi_{\infty}^{m-N}(\mathbb{R}^n)$ . Comme  $N \in \mathbb{N}_0$  était quelconque, cela montre que

$$B - A \in \Psi_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_N \Psi_{\infty}^N(\mathbb{R}^n).$$

Pour conclure la démonstration du théorème de réduction, on aurait besoin de savoir que  $A - B$  a un noyau de Schwartz de la forme  $I(c)$  pour  $c \in \mathcal{S}_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_{\xi}^n)$ .

**Proposition 2.18.** *Un opérateur pseudodifférentiel  $Q$  est dans  $\Psi_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si son noyau de Schwartz  $K_Q$  est lisse et satisfait à des estimations de la forme*

$$|D_x^{\alpha} D_y^{\beta} K_Q(x, y)| \leq C_{N,\alpha,\beta} (1 + |x - y|)^{-N} \quad (2.31)$$

pour tout  $\alpha, \beta$  et  $N$ . De plus, dans ce cas, il existe  $q \in \mathcal{S}_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_{\xi}^n)$  tel que  $K_Q = I(q)$ .

*Démonstration.*  $\implies$ ) Si  $Q \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ , alors pour  $N \in \mathbb{R}$ , il existe  $q_N \in \mathcal{S}_\infty^N(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  tel que  $K_Q = I(q_N)$ , c'est-à-dire que

$$K_Q(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} q_N(x, y, \xi) d\xi$$

au sens des distributions. En fait, pour  $N \ll -n - 1$ , l'intégrale converge absolument et on peut intégrer par parties pour obtenir que

$$(x - y)^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma K_Q(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} (-D_\xi^\alpha)(\xi + D_x)^\beta (-\xi + D_y)^\gamma q_N(x, y, \xi) d\xi$$

avec l'intégrale à droite convergeant absolument pourvu que  $N - |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \ll -n - 1$ . Comme on peut prendre  $N$  arbitrairement négatif, cela montre que

$$\sup_{x, y} |(x - y)^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma K_Q(x, y)| < \infty$$

pour tout multi-indices  $\alpha, \beta, \gamma$ , établissant les estimations voulues.

$\Leftarrow$ ) Supposons maintenant que  $K_Q$  est lisse et tel que les estimations (2.31) sont vérifiées. Posons  $z = x - y$  et considérons la fonction

$$f(x, z) = f(x, x - y) = K_Q(x, y).$$

En termes de la variable  $z$ , les estimations (2.31) prennent la forme

$$\sup_{(x, z)} |z^\alpha D_x^\beta D_z^\gamma f(x, z)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n. \quad (2.32)$$

En particulier, pour chaque  $x$  fixée,  $f(x, \cdot)$  est une fonction de Schwartz, si bien qu'on peut prendre sa transformée de Fourier en  $z$  et considérer la nouvelle fonction

$$b(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi} f(x, z) dz$$

avec

$$\sup_{(x, \xi)} |\xi^\alpha D_x^\beta D_\xi^\gamma b(x, \xi)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n.$$

On en déduit que  $b \in \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$ . Par construction, on a donc que  $Q \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  avec  $K_Q = I(b)$ , ce qui complète la démonstration.  $\square$

On peut finalement compléter la preuve du théorème de réduction.

*Fin de la démonstration du Théorème 2.12.* On a déjà trouvé un symbole  $b \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$  tel que  $A - B = R \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  avec  $K_B = I(b)$ . Par la proposition précédente, on peut trouver  $r \in \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$  tel que  $K_R = I(r)$ . En prenant  $a = b + r \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}_x^n; \mathbb{R}_\xi^n)$ , on a donc bien finalement que

$$K_A = I(a).$$

Clairement,  $a$  est unique, puisque  $r$  tel que  $I(r) = K_R$  l'est en utilisant le fait que la transformée de Fourier est un isomorphisme.  $\square$



## 2.5 Quantification

Dans le théorème de réduction, la quantification qu'on utilise est la quantification à gauche

$$\begin{aligned} q_G : \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \\ a &\mapsto I(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec inverse  $\sigma_G : \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . On aurait pu tout aussi bien considérer la quantification à droite

$$\begin{aligned} q_D : \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \\ a &\mapsto I(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(y, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec inverse  $\sigma_D : \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Comme  $K_{A^*}(x, y) = \overline{K_A(y, x)}$  au sens des distributions, voir plus précisément (2.20), on a que

$$K_{q_G(a)^*} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{i(y-x)\cdot\xi} a(y, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \bar{a}(y, \xi) d\xi = q_D(\bar{a}).$$

En termes des applications inverses, cela donne  $\sigma_D(A) = \overline{\sigma_G(A^*)}$ . Une autre manière de quantifier, c'est-à-dire de construire un opérateur à partir d'un symbole, est la quantification de Weyl

$$\begin{aligned} q_W : \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \\ a &\mapsto I(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) d\xi \end{aligned} \quad (2.35)$$

avec inverse  $\sigma_W : \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Cette quantification est particulièrement utile en mécanique quantique. Elle est aussi plus naturelle puisqu'elle met les variables  $x$  et  $y$  sur un pied d'égalité. Remarquons aussi que

$$q_W(a)^* = q_W(\bar{a}),$$

donc  $q_W(a)$  est formellement auto-adjoint si et seulement si le symbole  $a$  est à valeurs réelles.

**Lemme 2.19.** *Pour un symbole  $a \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,*

$$\sigma_G(q_D(a))(x, \xi) \sim \sum \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_x^\alpha D_\xi^\alpha a(x, \xi) \sim e^{iD_x \cdot D_\xi} a(x, \xi).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la somme asymptotique (2.30) utilisée pour définir  $\sigma_G$ .  $\square$

Les applications de quantifications ne sont pas des isomorphismes d'algèbres, puisque l'algèbre des symboles est commutative, alors que l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels ne l'est pas. Pour déterminer dans quelle mesure on ne peut pas avoir un isomorphisme, considérons le quotient

$$\mathcal{S}_\infty^{m-1}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n) := \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n) / \mathcal{S}_\infty^{m-1}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n). \quad (2.36)$$

**Définition 2.20.** Le **symbole principal** d'un opérateur  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  est donné par

$$\sigma_m(A) := [\sigma_G(A)] = [\sigma_D(A)] \in \mathcal{S}_\infty^{m-[1]}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

**Remarque 2.21.** Par le Lemme 2.19, on a bien que  $[\sigma_G(A)] = [\sigma_D(A)]$ .

Le symbole principal donne lieu à une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Psi_\infty^{m-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{S}_\infty^{m-[1]}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \longrightarrow 0. \quad (2.37)$$

Cette suite est compatible avec les structures d'algèbre comme le montre la prochaine proposition.

**Proposition 2.22.** Pour  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  et  $B \in \Psi_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$\sigma_{m+m'}(A \circ B) = \sigma_m(A)\sigma_{m'}(B).$$

Plus généralement, on a que

$$\sigma_G(A \circ B) \sim e^{iD_y \cdot D_\xi} (a(x, \xi)b(y, \eta))|_{x=y, \eta=\xi} \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha a(x, \xi))(D_x^\alpha b(x, \xi))$$

pour  $a = \sigma_G(A)$  et  $b = \sigma_G(B)$ .

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $A = q_G(a)$  et  $B = q_D(b)$ . Alors par la construction de  $\sigma_G$ , on a que

$$\sigma_G(A \circ B) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_y^\alpha (a(x, \xi)b(y, \xi))|_{x=y},$$

d'où

$$\sigma_{m+m'}(A \circ B) = [\sigma_G(A)][\sigma_D(B)] = \sigma_m(A)\sigma_{m'}(B).$$

Pour obtenir le développement asymptotique de  $\sigma_G(A \circ B)$  en termes de  $a$  et  $\sigma_G(B)$ , remarquons que par le Lemme 2.19,

$$\sigma_G(B) = \sigma_G(q_D(b)) \sim e^{iD_x \cdot D_\xi} b \implies b \sim e^{-iD_x \cdot D_\xi} \sigma_G(B).$$

Ainsi, on calcule que

$$\begin{aligned} \sigma_G(A \circ B) &\sim e^{iD_\xi \cdot D_y} (a(x, \xi)b(y, \xi))|_{x=y} \sim e^{iD_\xi \cdot D_y} (a(x, \xi)e^{-iD_y \cdot D_\xi} \sigma_G(B)(y, \xi))|_{x=y} \\ &\sim e^{i(D_\xi + D_\eta) \cdot D_y} e^{-iD_y \cdot D_\eta} (a(x, \xi)\sigma_G(B)(y, \eta))|_{x=y, \xi=\eta} \\ &\sim e^{iD_\xi \cdot D_y} (a(x, \xi)\sigma_G(B)(y, \eta))|_{x=y, \xi=\eta}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

□

**Corollaire 2.23.** Pour  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  et  $B \in \Psi_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$\sigma_G(A \circ B - B \circ A) = -i\{a, b\} + r, \quad r \in \mathcal{S}_\infty^{m+m'-2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),$$

où  $a = \sigma_G(A)$ ,  $b = \sigma_G(B)$  et

$$\{a, b\} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} - \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial b}{\partial \xi_j} \right) \in \mathcal{S}_\infty^{m+m'-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$$

est le crochet de Poisson de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 2.24.** Pour la quantification de Weyl, montrer que pour  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $B \in \Psi_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$\sigma_W(A \circ B)(x, \xi) = e^{\frac{i}{2}(D_\xi \cdot D_y - D_x \cdot D_\eta)} (\sigma_W(A)(x, \xi) \sigma_W(B)(y, \eta)) \Big|_{x=y, \xi=\eta}.$$

En particulier, on a que

$$\sigma_W(A \circ B)(x, \xi) = \sigma_W(A) \sigma_W(B) - \frac{i}{2} \{\sigma_W(A), \sigma_W(B)\} + r, \quad r \in \mathcal{S}_\infty^{m+m'-2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

## 2.6 Ellipticité

Soient  $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_x^\alpha \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  et  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pour déterminer les solutions  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  de l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$Au = \phi,$$

on peut essayer de trouver un inverse  $G_A \in \Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  :

$$G_A \circ A = A \circ G_A = \text{Id}.$$

Dans ce cas, la solution est unique et donnée par  $u = G_A(f)$ . Cependant, un inverse n'existe pas toujours. Par exemple, si un tel inverse existe, alors par la Proposition 2.22, on a que

$$\sigma_m(A) \sigma_m(G_A) = \sigma_m(\text{Id}) \equiv 1 \in \mathcal{S}_\infty^{0-[-1]}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),$$

c'est-à-dire que le symbole principal de  $A$  doit lui aussi être inversible. Cela suggère la définition suivante.

**Définition 2.25.** Un opérateur  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  est **elliptique** s'il existe  $[b] \in \mathcal{S}_\infty^{-m-[-1]}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  tel que

$$\sigma_m(A) \cdot [b] \equiv 1 \quad \text{dans } \mathcal{S}^{0-[-1]}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

**Exemple 2.26.** La relation (1.32) montre que le laplacien  $\Delta = \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2$  est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 2 avec

$$\sigma_G(\Delta) = \sigma_D(\Delta) = |\xi|^2.$$

Ainsi, en prenant  $b = (1 + |\xi|^2)^{-1} \in \mathcal{S}_{\infty}^{-2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , on a que

$$\sigma_G(\Delta)b = \frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} = 1 - \frac{1}{1 + |\xi|^2} = 1 - b,$$

ce qui montre que  $\sigma_m(\Delta)[b] \equiv 1$  dans  $\mathcal{S}_{\infty}^{0-[1]}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire que le laplacien est un opérateur elliptique.

**Théorème 2.27.** Soit  $A \in \Psi_{\infty}^m(\mathbb{R}^n)$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) l'opérateur  $A$  est elliptique ;
- 2) il existe  $b \in \mathcal{S}_{\infty}^{-m}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  tel que  $\sigma_G(A) \cdot b - 1 \in \mathcal{S}_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  ;
- 3) il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $|\sigma_G(A)(x, \xi)| \geq \epsilon(1 + |\xi|)^m$  pour  $|\xi| > \frac{1}{\epsilon}$  ;
- 4) il existe  $B \in \Psi_{\infty}^{-m}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $A \circ B - \text{Id} \in \Psi_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* 1)  $\implies$  2) : Soit  $b_0 \in \mathcal{S}_{\infty}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  un représentant de la classe de  $[b] \in \mathcal{S}_{\infty}^{-m-[1]}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , de sorte que

$$\sigma_G(A) \cdot b_0 - 1 = e \in \mathcal{S}_{\infty}^{-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Autrement dit,  $\sigma_G(A)$  est inversible à un élément de  $\mathcal{S}_{\infty}^{-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  près. Soit alors  $f \in \mathcal{S}^{-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  tel que

$$f \sim \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j e^j \implies (1 + e)(1 + f) \sim 1.$$

En prenant  $b = b_0(1 + f)$ , on a alors  $\sigma_G(A)b \sim 1$  tel que voulu.

2)  $\implies$  3) : Comme  $\sigma_G(A)b - 1 \in \mathcal{S}_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$|\sigma_G(A)b| \geq \frac{1}{2} \quad \forall \xi \text{ tel que } |\xi| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Ainsi, puisque  $b \in \mathcal{S}_{\infty}^{-m}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , on a que

$$|\sigma_G(A)| \geq \frac{1}{2|b(x, \xi)|} \geq \frac{(1 + |\xi|)^m}{2\|b\|_{0, -m}} \quad \forall \xi \text{ tel que } |\xi| > \frac{1}{\epsilon}.$$

En prenant  $\epsilon > 0$  plus petit si nécessaire, on peut supposer que  $\epsilon < \frac{1}{2\|b\|_{0, -m}}$ , de sorte que le résultat suit.

3)  $\implies$  4) : On suppose qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $|\sigma_G(A)(x, \xi)| \geq \epsilon(1 + |\xi|)^m$  pour  $|\xi| > \frac{1}{\epsilon}$ . Posons alors

$$b(x, \xi) = \frac{1 - \rho(\xi)}{\sigma_G(A)(x, \xi)},$$

où  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est telle que  $\rho(\xi) = 1$  pour  $|\xi| \leq \frac{2}{\epsilon}$ , de sorte que  $b \in \mathcal{S}_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Considérons alors l'opérateur  $B_0 := q_G(b)$ . Par définition du symbole  $b$ ,

$$A \circ B_0 - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-1}(\mathbb{R}^n), \quad \text{car} \quad \sigma_G(A \circ B_0) \equiv \sigma_G(A)\sigma_G(B) \equiv 1 \quad \text{mod} \quad \mathcal{S}_\infty^{-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Ainsi,  $A \circ B_0 = \text{Id} + E_1$  avec  $E_1 \in \Psi_\infty^{-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Soit  $E \in \Psi_\infty^{-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  tel que

$$\sigma_G(E) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_G((-E_1)^k).$$

Alors on a que

$$(\text{Id} + E_1)(\text{Id} + E) - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n),$$

car pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$R_N := E - \sum_{k=1}^{N-1} (-E_1)^k \in \Psi_\infty^{-N}(\mathbb{R}^n),$$

donc

$$\begin{aligned} (\text{Id} + E_1)(\text{Id} + E) &= (\text{Id} + \sum_{k=1}^{N-1} (-E_1)^k + R_N) = \text{Id} + (-1)^{N-1} E_1^N + (\text{Id} + E_1)R_N \\ &= \text{Id} + K_N, \quad K_N \in \Psi_\infty^{-N}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (2.39)$$

En prenant  $B = B_0(\text{Id} + E)$ , on alors que

$$A \circ B = A \circ B_0(\text{Id} + E) = (\text{Id} + E_1)(\text{Id} + E) = \text{Id} + R, \quad \text{avec} \quad R \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

4)  $\implies$  1) : Si  $B \in \Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  est tel que  $A \circ B - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ , alors il suffit de prendre  $[b] = \sigma_{-m}(B)$ , puisque

$$\sigma_m(A)\sigma_{-m}(B) = \sigma_0(A \circ B) = \sigma_0(\text{Id}) = 1.$$

□

**Remarque 2.28.** Par un argument similaire, un opérateur  $A \in \Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  est elliptique si et seulement si on peut trouver  $B \in \Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $B \circ A - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ . De plus, si  $B_G$  et  $B_D$  dans  $\Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  sont tels que  $B_G A - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  et  $A B_D - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$B_G \equiv B_G A B_D \equiv B_D \quad \text{mod} \quad \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

**Définition 2.29.** Pour un opérateur elliptique  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ , une **paramétrice à droite** est un opérateur  $B \in \Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $A \circ B - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ . Similairement, une **paramétrice à gauche** est un opérateur  $B \in \Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $B \circ A - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ . Par la remarque précédente, un paramétrice à gauche est aussi une paramétrice à droite et vice-versa.

Cette inversibilité des opérateurs elliptiques nous permet de donner une caractérisation de la régularité des solutions d'une équation elliptique linéaire. Pour ce faire, on aura besoin au préalable du lemme suivant.

**Lemme 2.30.** *Un opérateur  $Q \in \Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  définit une application*

$$Q : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* L'action de  $Q$  sur  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est définie par dualité, c'est-à-dire que pour  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$Qu(\bar{\phi}) = u(\overline{Q^*\phi}) \implies Qu(\phi) = u(\overline{Q^*\bar{\phi}}).$$

A priori, cette définition nous assure seulement que  $Qu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Pour voir que c'est en fait une fonction lisse, rappelons que si  $K_Q$  est le noyau de Schwartz de  $Q$ , alors par la Proposition 2.18,

$$\sup_{x,y} |(x-y)^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma K_Q(x,y)| < \infty.$$

Ainsi,  $K_Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^n; \mathcal{S}(\mathbb{R}_y^n))$ , de sorte qu'en termes du noyau de Schwartz, on a que

$$\begin{aligned} Qu(\phi) &= u\left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{K_{Q^*}(\cdot, y)} \phi(y) dy\right) = u\left(\int_{\mathbb{R}^n} K_Q(y, \cdot) \phi(y) dy\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(K_Q(x, \cdot)) \phi(x) dx. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Donc  $Qu$  est en fait la fonction  $Qu(x) = u(K_Q(x, \cdot))$ . Cette fonction est lisse, puisque par linéarité et les estimations ci-haut,

$$D_x^\alpha Qu(x) = u(D_x^\alpha K_Q(x, \cdot)).$$

□

Plus généralement, un opérateur  $Q \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  induit une application linéaire continue

$$Q : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

par dualité :

$$Qu(\phi) = u(\overline{Q^*\phi}), \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Le lemme précédent montre que les opérateurs contenu dans  $\Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  ont un effet régularisant en transformant toute distribution tempérée en une fonction lisse. Pour cette raison, ils sont appelés **opérateurs régularisants**. C'est cette observation qui nous permet de caractériser la régularité des solutions d'une équation elliptique.

**Théorème 2.31** (Régularité elliptique). *Si  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  est un opérateur elliptique et  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est une distribution tempérée telle que  $Au \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors en fait  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

*Démonstration.* Soit  $B \in \Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  une paramétrice pour  $A$ , de sorte que  $E := B \circ A - \text{Id}$  soit un opérateur régularisant. Alors on a que

$$u = \text{Id}(u) = (B \circ A - E)u = B(Au) - Eu. \tag{2.41}$$

Or, par le Lemme 2.30,  $Eu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors que par hypothèse  $Au \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Le terme de droite de l'équation (2.41) est donc dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , d'où le résultat. □

## 2.7 Action sur les espaces de Sobolev

Les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 agissent naturellement sur les fonctions  $L^2$ . Pour décrire plus précisément cette action, il nous faudra toutefois établir quelques résultats préliminaires.

**Lemme 2.32** (Critère de Schur). *Si  $K$  est une fonction localement intégrable sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dy < \infty, \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dx < \infty,$$

*alors l'opérateur  $O_K$  associé est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire qu'il induit une application linéaire continue*

$$O_K : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* Puisque les fonctions de Schwartz sont denses dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , il suffit de trouver une constante  $C > 0$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |O_K(\phi)|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^2 dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Or, pour le terme de gauche, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |O_K(\phi)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} K(x, y) \overline{K(x, z)} \phi(y) \phi(z) dy dz dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^{3n}} |K(x, y)| |K(x, z)| |\phi(y)|^2 dy dx dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left( \int_{\mathbb{R}^{3n}} |K(x, y)| |K(x, z)| |\phi(z)|^2 dy dx dz \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Or, les deux facteurs à droites sont égaux. Comme

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |K(x, y)| |K(x, z)| dx dz \leq \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, z)| dz \right) \left( \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dx \right),$$

le résultat en découle. □

Grâce à la Proposition 2.18, on peut en particulier appliquer le critère de Shur aux opérateurs régularisants, montrant ainsi qu'un opérateur  $Q \in \Psi_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  induit une application linéaire continue

$$Q : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Pour étendre ce résultat aux opérateurs pseudodifférentiels d'ordre zéro, on suivra l'approche de Hörmander basée sur la notion suivante.

**Définition 2.33.** Un symbole principale  $[a] \in \mathcal{S}_{\infty}^{m-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  est **strictement positif** s'il existe  $a \in [a]$  tel que  $a(x, \xi) > 0$  pour tout  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

**Lemme 2.34.** Soit  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  un opérateur elliptique formellement auto-adjoint (i.e.  $A^* = A$ ) ayant un symbole principal strictement positif. Alors il existe  $B \in \Psi_\infty^{\frac{m}{2}}(\mathbb{R}^n)$  un opérateur elliptique formellement auto-adjoint ayant un symbole principale strictement positif tel que

$$A = B^2 + G$$

pour un certain  $G \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence en prenant d'abord  $b_0 = a^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}_\infty^{\frac{m}{2}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  avec  $a$  un représentant strictement positif de  $\sigma_m(a)$ . Soit  $B_0 \in \Psi_\infty^{\frac{m}{2}}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\sigma_{\frac{m}{2}}(B_0) = [b_0]$ . En remplaçant  $B_0$  par  $\frac{B_0 + B_0^*}{2}$  si nécessaire, on peut supposer que  $B_0 = B_0^*$ . Dans ce cas, on a que

$$\sigma_m(B_0^2) = \sigma_{\frac{m}{2}}(B_0)^2 = [b_0]^2 = [a] \in \mathcal{S}_\infty^{m-[1]}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Ainsi,  $E_1 := A - B_0^2 \in \Psi_\infty^{m-1}(\mathbb{R}^n)$  est formellement auto-adjoint. Son symbole principal peut être représenté par un symbole réel car  $\sigma_W(E_1)$  est réel. Supposons maintenant que nous ayons déjà

$$E_{N+1} := A - \left( \sum_{j=0}^N B_j \right)^2 \in \Psi_\infty^{m-N-1}(\mathbb{R}^n) \quad (2.43)$$

avec  $B_j \in \Psi_\infty^{\frac{m}{2}-j}(\mathbb{R}^n)$  des opérateurs formellement auto-adjoint, le cas  $N = 0$  venant d'être établi. Soit  $B_{N+1} \in \Psi_\infty^{\frac{m}{2}-N-1}(\mathbb{R}^n)$  un nouveau terme de sorte que (2.43) devienne

$$\begin{aligned} A - \left( \sum_{j=0}^{N+1} B_j \right)^2 &= E_{N+1} - B_{N+1} \left( \sum_{j=0}^N B_j \right) - \left( \sum_{j=0}^N B_j \right) B_{N+1} - B_{N+1}^2 \\ &\equiv E_{N+1} - B_{N+1} B_0 - B_0 B_{N+1} \pmod{\Psi_\infty^{m-N-2}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

En prenant le symbole principal, cela donne

$$\sigma_{m-N-1}(E_{N+1} - B_{N+1} B_0 - B_0 B_{N+1}) = \sigma_{m-N-1}(E_{N+1}) - 2\sigma_{\frac{m}{2}-N-1}(B_{N+1})\sigma_{\frac{m}{2}}(B_0).$$

Pour résoudre le problème à l'ordre suivant, il faut que ce symbole principal s'annule, ce qui suggère de choisir  $B_{N+1}$  de sorte que

$$\sigma_{\frac{m}{2}-N-1}(B_{N+1}) = \frac{\sigma_{m-N-1}(E_{N+1})}{2\sigma_{\frac{m}{2}}(B_0)}.$$

Puisque  $E_{N+1}$  est formellement auto-adjoint, son symbole principal est à valeurs réelles. En remplaçant  $B_{N+1}$  par  $\frac{B_{N+1} + B_{N+1}^*}{2}$  au besoin, on peut donc supposer que  $B_{N+1}$  est formellement auto-adjoint. Avec ce choix de  $B_{N+1}$ , on obtient (2.43) avec  $N$  remplacé par  $N + 1$ . Cela montre par récurrence que (2.43) est valide pour tout  $N \in \mathbb{N}_0$ . Soit alors  $B' \in \Psi_\infty^{\frac{m}{2}}(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$\sigma_W(B') \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_W(B_j)$$



et posons  $B := \frac{B' + (B')^*}{2}$ . Alors  $B$  est formellement auto-adjoint et tel que

$$\sigma_W(B) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_W(B_j).$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a donc que

$$\begin{aligned} A - B^2 &= A - \left( \sum_{j=0}^N B_j + R_{N+1} \right)^2, \quad \text{avec } R_{N+1} \in \Psi_{\infty}^{\frac{m}{2} - N - 1}(\mathbb{R}^n), \\ &= A - \left( \sum_{j=0}^N B_j \right)^2 + R_{N+1} \left( \sum_{j=0}^N B_j \right) + \left( \sum_{j=0}^N B_j \right) R_{N+1} + R_{N+1}^2 \\ &\equiv 0 \quad \text{mod } \Psi_{\infty}^{m - N - 1}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Puisque  $N \in \mathbb{N}$  était arbitraire, il faut donc que  $A - B^2 \in \Psi_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  et  $B$  est l'opérateur recherché.  $\square$

À l'aide de ce lemme, on peut montrer que les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre zéro induisent des opérateurs bornés sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en utilisant un truc de Hörmander.

**Théorème 2.35.** *Soit  $A \in \Psi_{\infty}^0(\mathbb{R}^n)$ . Alors l'application linéaire continue  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue*

$$A : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* Clairement, il suffit de trouver une constante  $C > 0$  telle que

$$\|A\phi\|_{L^2}^2 \leq C \|\phi\|_{L^2}^2 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Autrement dit, on doit trouver une constante  $C > 0$  telle que

$$\langle \phi, A^* A \phi \rangle_{L^2} \leq C \|\phi\|_{L^2}^2 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Or,  $A^* A \in \Psi_{\infty}^0(\mathbb{R}^n)$  est clairement formellement auto-adjoint et son symbole principale

$$\sigma_0(A^* A) = \sigma_0(A^*) \sigma_0(A) = \overline{\sigma_0(A)} \sigma_0(A) = |\sigma_0(A)|^2$$

peut être représenté par un symbole positif. Soit  $K > 0$  une constante suffisamment grande telle que

$$K - |\sigma_0(A)|^2$$

peut être représenté par un symbole strictement positif. Alors l'opérateur  $K - A^* A$  satisfait aux hypothèses du Lemme 2.34, de sorte qu'il existe  $B \in \Psi_{\infty}^0(\mathbb{R}^n)$  formellement auto-adjoint et  $G \in \Psi_{\infty}^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  tels que

$$K - A^* A = B^2 + G.$$

De cette façon, pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$\langle \phi, (K - A^*A)\phi \rangle_{L^2} = \langle \phi, B^2\phi \rangle_{L^2} + \langle \phi, G\phi \rangle_{L^2} = \langle B\phi, B\phi \rangle_{L^2} + \langle \phi, G\phi \rangle_{L^2},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|A\phi\|_{L^2}^2 &= K\|\phi\|_{L^2}^2 - \|B\phi\|_{L^2}^2 - \langle \phi, G\phi \rangle_{L^2} \\ &\leq K\|\phi\|_{L^2}^2 + |\langle \phi, G\phi \rangle_{L^2}| \\ &\leq C\|\phi\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

pour une certaine constante  $C > K$ , où le critère de Schur du Lemme 2.32 a été utilisé à la dernière ligne.  $\square$

Plus généralement, on peut faire agir les opérateurs pseudodifférentiels sur les espaces de Sobolev.

**Définition 2.36.** L'espace de Sobolev  $L^2$  d'ordre  $k \in \mathbb{N}$  est défini par

$$L_k^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}.$$

En prenant la transformée de Fourier, on a donc que

$$\begin{aligned} u \in L_k^2(\mathbb{R}^n) &\iff \xi^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ tel que } |\alpha| \leq k \\ &\iff (1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{2.47}$$

De ce point de vue,  $L_k^2(\mathbb{R}^n)$  n'est qu'une version à poids de l'espace  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Cela suggère de définir pour  $k \in \mathbb{R}$

$$L_k^2(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \tag{2.48}$$

C'est un espace d'Hilbert avec produit scalaire et norme donnés par

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{L_k^2} &:= \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \langle \xi \rangle^k \hat{u}, \langle \xi \rangle^k \hat{v} \rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi, \\ \|u\|_{L_k^2} &:= \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_k^2}}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

où  $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ . Autrement dit, en considérant l'opérateur pseudodifférentiel

$$\langle D \rangle^k = q_G(\langle \xi \rangle^k) = q_D(\langle \xi \rangle^k) \in \Psi_\infty^k(\mathbb{R}^n),$$

on a que

$$\langle u, v \rangle_{L_k^2} = \langle \langle D \rangle^k u, \langle D \rangle^k v \rangle_{L^2}.$$

En termes de cet opérateur, on a que

$$u \in L_k^2(\mathbb{R}^n) \iff \langle D \rangle^k u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Clairement, pour  $k \geq k'$ , on a une inclusion continue

$$L_k^2(\mathbb{R}^n) \subset L_{k'}^2(\mathbb{R}^n), \quad (2.50)$$

ce qui suggère de poser

$$L_\infty^2(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \in \mathbb{R}} L_k^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad L_{-\infty}^2(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} L_k^2(\mathbb{R}^n).$$

En termes des fonctions de Schwartz et des distributions tempérées, on a la suite d'inclusions strictes

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq L_\infty^2(\mathbb{R}^n) \subsetneq L_{-\infty}^2(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (2.51)$$

En particulier, l'espace  $L_{-\infty}^2(\mathbb{R}^n)$  ne contient pas toutes les distributions tempérées. Il faut considérer les versions à poids des espaces de Sobolev pour obtenir toutes les distributions tempérées, à savoir les espaces de Sobolev à poids de la forme

$$\langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle x \rangle^{-q} u \in L_k^2(\mathbb{R}^n)\}$$

pour  $q \in \mathbb{R}$ . Ce sont à nouveau des espaces d'Hilbert avec produit scalaire et norme donnés par

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\langle x \rangle^q L_k^2} &:= \langle \langle x \rangle^{-q} u, \langle x \rangle^{-q} v \rangle_{L_k^2}, \\ \|u\|_{\langle x \rangle^q L_k^2} &:= \sqrt{\langle u, u \rangle_{\langle x \rangle^q L_k^2}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

**Théorème 2.37.** *Pour chaque  $q, k, m \in \mathbb{R}$ , un opérateur  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  définit une application linéaire continue*

$$A : \langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \langle x \rangle^q L_{k-m}^2(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $q = 0$ . Dans ce cas, puisque  $L_k^2(\mathbb{R}^n) = \langle D \rangle^{-k} L^2(\mathbb{R}^n)$ , on voit que pour  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $\langle D \rangle^\ell \in \Psi_\infty^\ell(\mathbb{R}^n)$  définit une application linéaire continue

$$\langle D \rangle^\ell : L_k^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{k-\ell}^2(\mathbb{R}^n).$$

Au lieu de l'opérateur  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ , cela suggère de considérer l'opérateur

$$\tilde{A} := \langle D \rangle^{k-m} A \langle D \rangle^{-k} \in \Psi_\infty^0(\mathbb{R}^n).$$

Par le Théorème 2.35, l'opérateur  $\tilde{A}$  induit une application linéaire continue

$$\tilde{A} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

ce qui donne lieu au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\tilde{A}} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \langle D \rangle^k \uparrow & & \downarrow \langle D \rangle^{-k+m} \\ L_k^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{A} & L_{k-m}^2(\mathbb{R}^n). \end{array} \quad (2.53)$$

Comme toutes les applications sont continues, sauf peut-être celle induite par  $A$ , on en déduit que  $A$  induit bien une application linéaire continue

$$A = \langle D \rangle^{-k+m} \tilde{A} \langle D \rangle^k : L_k^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_{k-m}^2(\mathbb{R}^n).$$

Similairement, pour  $q \neq 0$ ,  $\langle x \rangle^q : L_k^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n)$  est par définition un isomorphisme, ce qui suggère de considérer le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{A} & \langle x \rangle^q L_{k-m}^2(\mathbb{R}^n) \\ \downarrow \langle x \rangle^{-q} & & \uparrow \langle x \rangle^q \\ L_k^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{Q} & L_{k-m}^2(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad (2.54)$$

avec  $Q := \langle x \rangle^{-q} A \langle x \rangle^q$ . Si  $a = \sigma_G(A)$ , alors le noyau de Schwartz de l'opérateur  $Q$  est donné au sens des distributions par

$$K_Q(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} q(x, y, \xi) d\xi, \quad q(x, y, \xi) = \langle x \rangle^{-q} \langle y \rangle^q a(x, \xi).$$

On pourra donc conclure du diagramme (2.54) que  $A$  induit une application continue

$$A : \langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \langle x \rangle^q L_{k-m}^2(\mathbb{R}^n)$$

en montrant que  $Q \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  et en utilisant le résultat déjà établi dans le cas  $q = 0$ . Il suffit pour ce faire de montrer que  $q \in (1 + |x - y|^2)^{\frac{|q|}{2}} \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$ . Autrement dit, on veut montrer que

$$\langle x - y \rangle^{-|q|} \frac{\langle y \rangle^q}{\langle x \rangle^q} a(x, \xi) \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n).$$

Puisque  $a \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , il suffit de montrer que

$$\frac{\langle y \rangle^q}{\langle x \rangle^q \langle x - y \rangle^{|q|}} \in \mathcal{C}_\infty^\infty(\mathbb{R}^n),$$

où  $\mathcal{C}_\infty^\infty(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions lisses sur  $\mathbb{R}^n$  qui, avec toutes leurs dérivées, sont bornées. D'abord, en inter-changeant  $x$  et  $y$  si nécessaire, on peut supposer que  $q \geq 0$ . Considérons donc les ouverts

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x - y| < \frac{|x| + |y|}{4}\} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x - y| > \frac{|x| + |y|}{8}\},$$

de sorte que  $\mathbb{R}^n = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Dans  $\Omega_1$ , on a que

$$|y| \leq |x - y| + |x| < \frac{1}{4}|y| + \frac{5}{4}|x| \implies |y| \leq \frac{5}{3}|x| \leq 2|x|.$$

À nouveau, comme on peut supposer que  $q \geq 0$ , cela montre qu'il existe une constante  $C_1$  telle que dans  $\Omega_1$ ,

$$\frac{\langle y \rangle^q}{\langle x - y \rangle^{|q|} \langle x \rangle^q} = \frac{\langle y \rangle^q}{\langle x - y \rangle^q \langle x \rangle^q} \leq C_1.$$

De même, dans  $\Omega_2$ ,

$$|x| + |y| < 8|x - y| \implies |y| < 8|x - y| \implies \frac{\langle y \rangle^q}{\langle x - y \rangle^{|q|} \langle x \rangle^q} \text{ est borné sur } \Omega_2.$$

Plus généralement, on conclut que  $\frac{\langle y \rangle^q}{\langle x - y \rangle^{|q|} \langle x \rangle^q} \in \mathcal{C}_\infty^\infty(\mathbb{R}^n)$ , puisque que dériver par rapport à  $x$  ou à  $y$  ne fait qu'améliorer les choses en ajoutant de la décroissance dans certaines directions à l'infini.  $\square$

Ce théorème nous permet entre autres de donner une version quantifiée de la régularité elliptique.

**Corollaire 2.38** (Régularité elliptique). *Soit  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  un opérateur elliptique et  $k, \ell, q \in \mathbb{R}$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $A, k, \ell$  et  $q$  telle que pour  $v \in \langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n)$  et  $u \in \langle x \rangle^q L_\ell^2(\mathbb{R}^n)$  une solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$Au = v, \tag{2.55}$$

on ait en fait  $u \in \langle x \rangle^q L_{m+k}^2(\mathbb{R}^n)$  avec

$$\|u\|_{\langle x \rangle^q L_{m+k}^2} \leq C \left( \|v\|_{\langle x \rangle^q L_k^2} + \|u\|_{\langle x \rangle^q L_\ell^2} \right).$$

*Démonstration.* Soit  $B \in \Psi_\infty^{-m}(\mathbb{R}^n)$  une paramétrice pour l'opérateur  $A$ , de sorte que

$$R := BA - \text{Id} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

En appliquant  $B$  de chaque côté de l'équation (2.55), on obtient donc

$$u = Bv - Ru. \tag{2.56}$$

Or, par le Théorème 2.37, il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$\|Bw\|_{\langle x \rangle^q L_{m+k}^2} \leq C_1 \|w\|_{\langle x \rangle^q L_k^2} \quad \forall w \in \langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n), \tag{2.57}$$

$$\|Rw\|_{\langle x \rangle^q L_{m+k}^2} \leq C_2 \|w\|_{\langle x \rangle^q L_\ell^2} \quad \forall w \in \langle x \rangle^q L_\ell^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.58}$$

En prenant  $C = \max\{C_1, C_2\}$ , on déduit donc le résultat voulu de (2.56) :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\langle x \rangle^q L_{m+k}^2} &\leq \|Bv\|_{\langle x \rangle^q L_{m+k}^2} + \|Ru\|_{\langle x \rangle^q L_{m+k}^2} \leq C_1 \|v\|_{\langle x \rangle^q L_k^2} + C_2 \|u\|_{\langle x \rangle^q L_\ell^2} \\ &\leq C \left( \|v\|_{\langle x \rangle^q L_k^2} + \|u\|_{\langle x \rangle^q L_\ell^2} \right). \end{aligned} \tag{2.59}$$

$\square$

Pour voir le lien entre le Corollaire 2.38 et le Théorème 2.31, il faut expliquer la relation entre les dérivées au sens des espaces de Sobolev et les dérivées au sens usuel. On aura besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.39.** Si  $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\mathcal{F}^{-1}(v)$  est une fonction continue bornée telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}(v)(x)| \leq \frac{\|v\|_{L^1}}{(2\pi)^n} \quad \forall v \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

où

$$\|v\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |v(\xi)| d\xi.$$

*Démonstration.* D'abord, comme  $|e^{ix \cdot \xi}| = 1$ , on a que

$$\sup_x |\mathcal{F}^{-1}(v)(x)| \leq \sup_x \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{ix \cdot \xi} v(\xi)| d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |v(\xi)| d\xi = \frac{\|v\|_{L^1}}{(2\pi)^n}.$$

Pour montrer que  $\mathcal{F}^{-1}(v)$  est continue en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , soit  $\epsilon > 0$ . Alors il existe une constante  $R > 0$  telle que

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi| > R} |v(\xi)| d\xi < \frac{\epsilon}{4}.$$

D'autre part, par la continuité uniforme de  $e^{ix \cdot \xi}$  sur tout compact de  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|x - x_0| < \delta \implies |e^{ix \cdot \xi} - e^{ix_0 \cdot \xi}| < \frac{(2\pi)^n \epsilon}{2(1 + \|v\|_{L^1})} \quad \text{pour } |\xi| \leq R.$$

Ainsi, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|x - x_0| < \delta$ , on a que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}^{-1}(v)(x) - \mathcal{F}^{-1}(v)(x_0)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{ix \cdot \xi} - e^{ix_0 \cdot \xi}| |v(\xi)| d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi| \leq R} |e^{ix \cdot \xi} - e^{ix_0 \cdot \xi}| |v(\xi)| d\xi \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi| > R} |e^{ix \cdot \xi} - e^{ix_0 \cdot \xi}| |v(\xi)| d\xi \tag{2.60} \\ &< \frac{\epsilon}{2(1 + \|v\|_{L^1})} \int_{|\xi| \leq R} |v(\xi)| d\xi + \frac{2}{(2\pi)^n} \int_{|\xi| > R} |v(\xi)| d\xi \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Comme  $\epsilon > 0$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  étaient quelconques, cela montre que  $\mathcal{F}^{-1}(v)$  est bien continue partout sur  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Dénotons par  $\mathcal{C}_k^k(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$   $k$ -fois différentiables telles que  $D^\alpha u$  est continue et bornée pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  avec  $|\alpha| \leq k$ . C'est un espace de Banach avec norme donnée par

$$\|u\|_{\mathcal{C}_k^k} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|.$$

En termes de cet espace, on a alors la version faible suivante du plongement de Sobolev<sup>1</sup>.

---

1. La version usuelle du plongement de Sobolev est formulée en termes des espaces d'Hölder, voir par exemple dans [Bre05].

**Proposition 2.40.** Si  $k > \frac{n}{2}$ , alors on a une inclusion linéaire continue  $L_k^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}_\ell^\ell(\mathbb{R}^n)$ , où  $\ell := \lceil k - \frac{n}{2} - 1 \rceil$  est le plus petit entier tel que  $\ell \geq k - \frac{n}{2} - 1$ .

*Démonstration.* Puisque que  $k > \frac{n}{2}$ , remarquons d'abord que si  $u \in L_k^2(\mathbb{R}^n)$ , alors sa transformée de Fourier est dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , puisque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\hat{u}\|_{L^1} = \|\langle \xi \rangle^{-k} \langle \xi \rangle^k \hat{u}\|_{L^1} \leq \|\langle \xi \rangle^{-k}\|_{L^2} \|\langle \xi \rangle^k \hat{u}\|_{L^2} = C_k \|u\|_{L_k^2} \quad \text{avec } C_k = \|\langle \xi \rangle^{-k}\|_{L^2} (2\pi)^{\frac{n}{2}}.$$

Par le Lemme 2.39, on voit donc que  $u$  est continue et bornée et qu'il y a une constante  $C'_k$  ne dépendant que de  $k$  telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C'_k \|u\|_{L_k^2}.$$

Plus généralement, pour  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  tel que  $|\alpha| < k - \frac{n}{2}$ , on a que  $D^\alpha u \in L_{k-|\alpha|}^2(\mathbb{R}^n)$ , donc en appliquant le même argument, on a que  $D^\alpha u$  est bornée et continue avec

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| \leq C_{k-|\alpha|} \|D^\alpha u\|_{L_{k-|\alpha|}^2} \leq C_{k-|\alpha|} \|u\|_{L_k^2}$$

pour une constante  $C_{k-|\alpha|}$  ne dépendant que de  $k - |\alpha|$ , d'où le résultat.  $\square$

En particulier, la Proposition 2.40 montre que

$$L_\infty^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ce qui montre que le Théorème 2.31 peut aussi être déduit du Corollaire 2.38. Le Lemme 2.39 permet aussi d'obtenir des résultats de compacité.

**Définition 2.41.** Une application linéaire continue  $A : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  entre deux espaces de Banach  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est **compacte** si toute suite bornée  $\{u_j\}$  de  $\mathcal{B}_1$  possède une sous-suite  $\{u_{j_i}\}$  telle que la suite  $\{Au_{j_i}\}$  converge dans  $\mathcal{B}_2$ . Dans ce cas, on dit aussi que  $A$  est un **opérateur compact**.

**Exercice 2.42.** Pour  $k \geq 0$ , montrer que l'inclusion linéaire continue  $L_k^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  n'est pas compacte.

**Lemme 2.43.** Pour  $k > 0$  et  $R > 0$ , soit  $\{u_j\}$  une suite bornée de  $L_k^2(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\text{supp } u_j \subset B_R$ , où  $B_R \subset \mathbb{R}^n$  est la boule fermée de rayon  $R$  centrée à l'origine. Alors cette suite possède une sous-suite qui converge dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* D'abord, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , remarquons que  $\{x^\alpha u_j\}$  est une suite bornée dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|x^\alpha u_j\|_{L^1} \leq \left( \int_{B_R} |x^\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u_j\|_{L^2} \leq \left( \int_{B_R} |x^\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u_j\|_{L_k^2}.$$

Ainsi, par le Lemme 2.39, on voit que pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ , il existe une constante  $C_k$  telle que

$$\|\hat{u}_j\|_{\mathcal{C}_k^k} \leq C_k \|u_j\|_{L_k^2}.$$

En appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli et un argument de diagonalisation, on sait alors qu'il existe  $\hat{u} \in C^0(\mathbb{R}^n)$  et une sous-suite  $\{\hat{u}_{j_i}\}$  telle que

$$\hat{u}_{j_i} \rightarrow \hat{u} \quad (2.61)$$

uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^n$ . Pour vérifier que la sous-suite  $\{u_{j_i}\}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , il suffit donc de montrer que  $\{\hat{u}_{j_i}\}$  est une suite de Cauchy pour la norme  $L^2$ . Soit donc  $\epsilon > 0$ . Puisque  $\{u_j\}$  est bornée dans  $L_k^2(\mathbb{R}^n)$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\langle \xi \rangle^k \hat{u}_j\|_{L^2}^2 \leq C \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

En particulier, pour  $R'$  assez grand tel que  $\langle R' \rangle^{2k} > \frac{4C}{\epsilon}$ , on a pour tout  $j$  et  $\ell$  que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R'}} |\hat{u}_j - \hat{u}_\ell|^2 d\xi &\leq \langle R' \rangle^{-2k} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R'}} \langle \xi \rangle^{2k} |\hat{u}_j - \hat{u}_\ell|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\epsilon}{4C} \|\langle \xi \rangle^k (u_j - u_\ell)\|_{L^2}^2 \leq \frac{\epsilon}{4C} 2 (\|\langle \xi \rangle^k u_j\|_{L^2}^2 + \|\langle \xi \rangle^k u_\ell\|_{L^2}^2) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Par la convergence uniforme de (2.61) sur  $B_{R'}$ , il existe aussi  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$i \geq N, \ell \geq N \implies \int_{B_{R'}} |\hat{u}_{j_i} - \hat{u}_{j_\ell}|^2 d\xi \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En combinant avec (2.62), on a donc que pour  $i \geq N$  et  $\ell \geq N$ ,

$$\|\hat{u}_{j_i} - \hat{u}_{j_\ell}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Comme  $\epsilon > 0$  était quelconque, cela montre que  $\{\hat{u}_{j_i}\}$  est bien une suite de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**Théorème 2.44.** *Pour  $q \leq q'$  et  $k \geq k'$ , l'inclusion continue  $\langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n) \subset \langle x \rangle^{q'} L_{k'}^2(\mathbb{R}^n)$  est compacte si et seulement si  $q < q'$  et  $k > k'$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{u_j\}$  une suite bornée de  $\langle x \rangle^q L_k^2(\mathbb{R}^n)$ . Il faut déterminer si une sous-suite convergant dans  $\langle x \rangle^{q'} L_{k'}^2(\mathbb{R}^n)$  existe. Grâce à l'isomorphisme

$$\langle D \rangle^{k'} \langle x \rangle^{-q'} : \langle x \rangle^{q'} L_{k'}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

quitte à remplacer  $u_j$  par  $\langle D \rangle^{k'} \langle x \rangle^{-q'} u_j$  si nécessaire, on peut se ramener au cas où  $q' = k' = 0$ ,  $q \leq 0$  et  $k \geq 0$ . Si  $q = 0$ , alors par l'Exercice 2.42, il existe une sous-suite bornée  $\{u_j\}$  dans  $L_k^2(\mathbb{R}^n)$  n'admettant pas de sous-suite convergente dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Similairement, si  $k = 0$ , on peut se ramener à l'Exercice 2.42 en prenant la transformée de Fourier, si bien que l'inclusion

$$\langle x \rangle^q L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$$

n'est pas compacte. Il reste donc à considérer le cas où  $q < 0$  et  $k > 0$ . Soit  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  telle que  $\rho(x) = 1$  pour  $|x| \leq 1$  et  $\rho(x) = 0$  pour



$|x| \geq 2$ . Pour  $R > 0$ , considérons alors la fonction  $\rho_R(x) = \rho(\frac{x}{R})$ . Comme la multiplication par  $\rho_R$  peut être vue comme un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0, on voit par le Théorème 2.37 qu'il existe une constante  $C_R$  dépendant de  $R$  telle que

$$\|\rho_R u\|_{L_k^2} \leq C_R \|u\|_{L_k^2} \quad \forall u \in L_k^2(\mathbb{R}^n).$$

Comme le support de  $\rho_R$  est contenu dans la boule  $B_{2R}$ , on peut donc appliquer le Lemme 2.43 à la suite  $\{\rho_R u_j\}$  pour extraire une sous-suite convergeant dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . En prenant une suite de telles sous-suites pour  $R \in \mathbb{N}$  et en utilisant un argument de diagonalisation, on peut donc extraire une sous-suite  $\{u_{j_i}\}$  telle que  $\{\rho_R u_{j_i}\}$  converge dans  $L^2$  pour tout  $R > 0$ .

D'autre part, comme la fonction  $(1 - \rho_R)$  est égale 0 sur la boule  $B_R$ , on a que

$$\begin{aligned} \|(1 - \rho_R)u_j\|_{L^2}^2 &\leq \langle R \rangle^{2q} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \langle x \rangle^{-2q} |u_j|^2 dx \\ &\leq \langle R \rangle^{2q} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-2q} |u_j|^2 dx \leq \langle R \rangle^{2q} \|u_j\|_{\langle x \rangle^q L^2}^2 \\ &\leq \langle R \rangle^{2q} \|u_j\|_{\langle x \rangle^q L_k^2}^2 \leq C^2 \langle R \rangle^{2q} \end{aligned} \tag{2.63}$$

pour une certaine constante  $C > 0$ . Cela va nous permettre de montrer que la sous-suite  $\{u_{j_i}\}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en montrant que c'est une suite de Cauchy. En effet, soit  $\epsilon > 0$  et prenons  $R > 0$  assez grand de sorte que  $C \langle R \rangle^q < \frac{\epsilon}{4}$ . Comme la sous-suite  $\{\rho_R u_{j_i}\}$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , elle est de Cauchy et il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\begin{aligned} i \geq N, j \geq N &\implies \|\rho_R u_{j_i} - \rho_R u_{j_\ell}\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2} \\ &\implies \|u_{j_i} - u_{j_\ell}\|_{L^2} \leq \|\rho_R(u_{j_i} - u_{j_\ell})\|_{L^2} + \|(1 - \rho_R)u_{j_i}\|_{L^2} + \|(1 - \rho_R)u_{j_\ell}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

Comme  $\epsilon > 0$  était quelconque, cela confirme que la sous-suite  $\{u_{j_i}\}$  est bien de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

## 2.8 Pseudolocalité

Si  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est un opérateur linéaire continu, alors son **support** est le support de son noyau de Schwartz  $K_A$  :

$$\text{supp } A := \text{supp } K_A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{2.64}$$

Pour des sous-ensembles  $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  et  $S \subset \mathbb{R}^n$ , on pose

$$E \circ S = \text{pr}_G(\text{pr}_D^{-1}(S) \cap E),$$

où  $\text{pr}_G$  et  $\text{pr}_D$  sont les projections  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur les facteurs de gauche et de droite respectivement.

**Remarque 2.45.** Si  $S$  est compact et  $E$  est fermé, alors  $E \circ S$  est fermé. En effet, dans ce cas, son intersection avec tout compact est l'image par  $\text{pr}_G$  d'un compact, donc est compacte, ce qui montre que  $E \circ S$  doit être fermé.

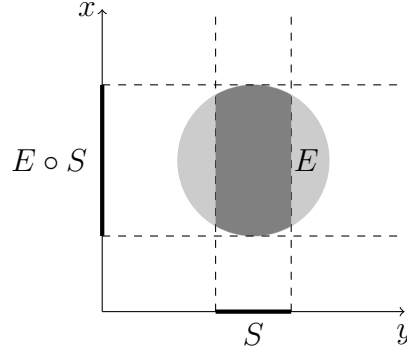


FIGURE 1 – L'ensemble  $E \circ S$

**Proposition 2.46.** *Si  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est un opérateur linéaire continu, alors*

$$\text{supp}(A\phi) \subset \text{supp}(A) \circ \text{supp}(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* Il faut montrer que

$$(\text{supp}(A) \circ \text{supp}(\phi))^c \subset (\text{supp}(A\phi))^c. \quad (2.65)$$

Pour ce faire, remarquons d'abord que par la Définition 1.28, le complémentaire du support d'une distribution tempérée  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est donné par

$$(\text{supp}(u))^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \psi(x) \neq 0 \text{ et } \psi u = 0\}.$$

Pour  $x_0 \in (\text{supp}(A) \circ \text{supp}(\phi))^c$ , soit donc  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty((\text{supp}(A) \circ \text{supp}(\phi))^c) \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction lisse à support compact telle que  $\rho(x_0) \neq 0$ . Par la Remarque 2.45, une telle fonction existe bien puisque  $(\text{supp}(A) \circ \text{supp}(\phi))^c$  est ouvert. Dans ce cas, pour  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a que

$$(\rho(A\phi))(\psi) = K_A(\rho(x)\psi(x)\phi(y)) = 0,$$

puisque  $(\rho\psi) \boxtimes \phi$  a son support à l'extérieur de  $\text{supp}(K_A)$ . Ainsi,

$$\rho(A\phi) = 0 \implies x_0 \in (\text{supp}(A\phi))^c,$$

ce qui montre qu'on a bien l'inclusion (2.65). □

**Définition 2.47.** Le **support singulier** d'une distribution tempérée  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble

$$\text{suppsing}(u) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ telle que } \phi(x) \neq 0 \text{ et } \phi u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}^c.$$

Le support singulier est un ensemble fermé. De plus, on a clairement que

$$\text{suppsing}(u) \subset \text{supp } u \quad \text{et} \quad \text{suppsing}(u) = \emptyset \implies u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

**Exercice 2.48.** Montrer que le support singulier du noyau de Schwartz  $K_A$  d'un opérateur pseudodifférentiel  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  est contenu dans la diagonale :

$$\text{suppsing}(K_A) \subset \mathfrak{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x = y\}.$$

Indice : Montrez d'abord que  $(x - y)^\alpha K_A(x, y)$  est différentiable autant de fois que l'on veut en prenant  $|\alpha|$  assez grand.

**Définition 2.49.** Un opérateur linéaire continu  $A : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est **pseudolocal** si

$$\text{suppsing}(Au) \subset \text{suppsing}(u) \quad \forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 2.50.** *Les opérateurs pseudodifférentiels sont pseudolocaux.*

*Démonstration.* Soit  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  un opérateur pseudodifférentiel et  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  une distribution tempérée. On doit montrer que

$$\text{suppsing}(u)^c \subset \text{suppsing}(Au)^c. \quad (2.66)$$

Soit  $x_0 \notin \text{suppsing}(u)$  et soit  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction telle que  $\rho \equiv 1$  près de  $x_0$  et  $\text{supp}(\rho) \subset \text{suppsing}(u)^c$ . Alors

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{avec} \quad u_1 = (1 - \rho)u \text{ et } u_2 = \rho u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi,  $Au_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , donc  $\text{suppsing}(Au) = \text{suppsing}(Au_1)$  et  $x_0 \notin \text{supp } u_1$ . Soit  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une autre fonction lisse à support compact telle que  $\psi(x_0) = 1$  et  $\psi(1 - \rho) = 0$ . Dans ce cas,

$$\psi Au_1 = \psi A(1 - \rho)u = \tilde{A}u,$$

où  $\tilde{A}$  est l'opérateur pseudodifférentiel ayant pour noyau de Schwartz

$$K_{\tilde{A}}(x, y) = \psi(x)K_A(x, y)(1 - \rho(y)).$$

Par notre choix de  $\psi$  et  $\rho$ , ce noyau de Schwartz a son support disjoint de la diagonal, donc par l'Exercice 2.48,  $K_{\tilde{A}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  et donc  $\tilde{A} \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ . Ainsi, par le Lemme 2.30 et le fait que  $\psi$  est une fonction à support compact, on voit que

$$\psi Au_1 = \tilde{A}u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \implies x_0 \notin \text{suppsing}(Au_1) = \text{suppsing}(Au),$$

établissant bien l'inclusion (2.66). □

## 2.9 Exercices supplémentaires

1. Montrer que tout opérateur linéaire continu  $A : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  possède un noyau de Schwartz dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ .
2. Démontrer le lemme de Borel, à savoir que pour des nombres  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  arbitraires spécifiés pour chaque  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , on puisse toujours trouver une fonction lisse  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  ayant  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha$  pour série de Taylor à l'origine.
3. Montrer que la quantification de Weyl  $q_W$  possède un inverse  $\sigma_W : \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  tel que  $\sigma_W(A)(x, \xi) \sim e^{-\frac{i}{2}D_\xi \cdot D_x} \sigma_G(A)$ . Montrer de même que pour tout  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $B \in \Psi_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n)$ , on a

$$\sigma_W(A \circ B)(x, \xi) \sim e^{\frac{i}{2}(D_\xi \cdot D_y - D_x \cdot D_\eta)} (\sigma_W(A)(x, \xi) \sigma_W(B)(y, \eta)) \Big|_{x=y, \xi=\eta}.$$

4. Soit  $a \in \mathcal{S}_\infty^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  le symbole d'un opérateur elliptique. Montrer que pour  $r > 0$  suffisamment grand, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a(x, r e^{i\theta})} \frac{d}{d\theta} a(x, r e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} \log(a(x, r e^{i\theta})) d\theta$$

est bien définie et est égale à un entier indépendant de  $r$  et de  $x \in \mathbb{R}^2$ . Conclure qu'il existe un opérateur elliptique  $A \in \Psi^1(\mathbb{R}^2)$  tel que la classe d'équivalence  $\sigma_1(A) \in \mathcal{S}^{1-[1]}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  de son symbole principal ne contienne aucun symbole  $b$  ne s'annulant nulle part.

### 3 Opérateurs pseudodifférentiels sur une variété lisse

Pour que la notion d'opérateur pseudodifférentiel ait un sens sur une variété lisse, il faut d'abord vérifier que ces derniers se comportent bien sous l'action d'un difféomorphisme.

#### 3.1 Invariance par changement de coordonnées

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, posons

$$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } u \Subset \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(u) \Subset \Omega\},$$

où  $V \Subset \Omega$  indique que la fermeture de  $V$  est un sous-ensemble compact de  $\Omega$ . Remarquons qu'un élément  $u \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  définit une fonctionnelle linéaire continue

$$\begin{aligned} u : \mathcal{C}^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\mapsto u(\phi) = u(\psi\phi), \end{aligned}$$

où  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  est tel que  $\psi \equiv 1$  sur  $\text{supp}(u)$ . On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas du choix d'une telle fonction  $\psi$ . La fonctionnelle  $u$  est continue au sens où

$$|u(\phi)| \leq C \max_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha \phi|,$$

où  $K$  est un sous ensemble compact de  $\Omega$  contenant  $\text{supp}(u)$  et  $C > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  sont des constantes ne dépendant que de  $u$ . Soit  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$  un difféomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . On a alors une opération de rappel

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega') &\rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \\ \phi &\mapsto \phi \circ F. \end{aligned} \tag{3.1}$$

**Lemme 3.1.** *Le rappel s'étend par continuité en une application  $F^* : \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega') \rightarrow \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Comme pour la densité de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , on peut montrer que  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega)$  pour la topologie faible induite par les semi-normes  $u \mapsto |u(\phi)|$  pour  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Pour voir comment la définition de  $F^*$  peut s'étendre à  $\mathcal{C}^{-\infty}(\Omega')$ , soit  $u \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega') \subset \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega')$ . Alors pour  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} (F^*u)(\phi) &= \int_{\Omega} (F^*u)(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} u(F(x))\phi(x)dx \\ &= \int_{\Omega'} u(y)\phi(G(y))|J_G(y)|dy = u(|J_G|G^*\phi), \end{aligned} \tag{3.2}$$

où on a posé  $x = G(y)$  avec  $G = F^{-1}$  et où  $J_G$  est le Jacobien de  $G$ . Puisque le rappel  $G^* : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega')$  est continu et que  $|J_G| \in \mathcal{C}^\infty(\Omega')$ , cela montre que pour un élément  $u \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega')$  quelconque, on peut définir  $F^*u$  par

$$F^*u(\phi) = u(|J_G|G^*\phi), \quad \phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

L'application  $F^* : \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega') \rightarrow \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega)$  est alors clairement continue.  $\square$

Maintenant, si  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est un opérateur linéaire continu tel que  $\text{supp}(A) \Subset \Omega \times \Omega$ , alors  $A$  induit une application

$$A : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega).$$

Cela suggère de définir l'image

$$A_F : \mathcal{C}^\infty(\Omega') \rightarrow \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega')$$

de  $A$  par  $F$  par  $A_F = G^* \circ A \circ F^*$ .

**Lemme 3.2.** *Le noyau de Schwartz de  $A_F$  est donné par*

$$K_{A_F}(x, y) = (G \times G)^* K_A \cdot |J_G(y)| \quad \text{sur } \Omega' \times \Omega'.$$

*Démonstration.* Pour  $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega')$ , on a que

$$\begin{aligned} (A_F \phi)(\psi) &= (G^*(A(F^* \phi)))(\psi) \\ &= A(F^* \phi)(|J_F| F^* \psi) = K_A((|J_F| F^* \psi) \boxtimes F^* \phi) \\ &= K_A((|J_F| F^* \psi) \boxtimes |J_F|(F^*(|J_G|\phi))) = (G \times G)^* K_A(\psi \boxtimes (|J_G|\phi)), \end{aligned} \tag{3.3}$$

d'où le résultat. □

On peut maintenant établir l'invariance par changement de coordonnées des opérateurs pseudodifférentiels.

**Théorème 3.3.** *Soit  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\text{supp}(A) \Subset \Omega \times \Omega$  pour un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$  est un difféomorphisme lisse, alors  $A_F : \mathcal{C}^\infty(\Omega') \rightarrow \mathcal{C}_c^{-\infty}(\Omega')$  est un élément de  $\Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ .*

*Démonstration.* Puisque  $A \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ , son noyau de Schwartz est donné au sens des distributions par

$$K_A(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi) d\xi$$

pour un certain symbole  $a \in \mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Par la densité de  $\mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  pour la topologie induite par celle de  $\mathcal{S}_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  pour  $m' > m$ , on peut supposer que  $a \in \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  en autant qu'on utilise les normes  $\|\cdot\|_{N, m'}$  pour arriver au résultat. Soit donc  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  une fonction telle que  $\rho(x)\rho(y) = 1$  pour  $(x, y) \in \text{supp}(A)$ , de sorte que

$$K_A(x, y) = I(\rho(x)\rho(y)a(x, \xi)).$$

Soit aussi  $\mu_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n)$  une fonction telle que  $\mu_\epsilon \equiv 1$  pour  $|x - y| < \frac{\epsilon}{2}$  et  $\mu_\epsilon(x, y) \equiv 0$  pour  $|x - y| > \epsilon$ , où  $\epsilon > 0$  reste à déterminer. Posons alors

$$K_{A_\epsilon} = I(\mu_\epsilon \rho(x)\rho(y)a(x, \xi)),$$

de sorte que  $A'_\epsilon = A - A_\epsilon \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ , le support de son noyau de Schwartz étant disjoint de la diagonale. On a donc automatiquement que  $(A'_\epsilon)_F \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  et il reste à montrer que  $(A_\epsilon)_F \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ . Par le Lemme 3.2,

$$K_{(A_\epsilon)_F}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(G(x)-G(y))\cdot\xi} b(G(x), G(y), \xi) |J_G(y)| d\xi, \quad (3.4)$$

où  $b(x, y, \xi) = \mu_\epsilon(x, y)\rho(x)\rho(y)a(x, \xi)$ . Par le théorème de Taylor avec reste de Laplace,

$$G(x) - G(y) = T(x, y) \cdot (x - y),$$

où  $T(x, y)$  est une fonction lisse à valeurs matricielles. Puisque  $dG(y) = T(y, y)$ , on voit que  $T(x, y)$  est une matrice inversible pour  $x = y$ . Par continuité,  $T(x, y)$  reste inversible pour  $(x, y) \in \text{supp}(A)$  avec  $|x - y| < 2\epsilon$  pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit. C'est le  $\epsilon$  que l'on choisira pour définir  $A_\epsilon$ .

Dans ce cas, en supposant que  $a \in \mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , on peut faire le changement de variable

$$\eta = T(x, y)^T \xi$$

dans (3.4), ce qui donne

$$K_{(A_\epsilon)_F}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\eta} c(x, y, \eta) d\eta$$

avec

$$c(x, y, \eta) = b(G(x), G(y), (T(x, y)^T)^{-1}\eta) |J_G(y)| |\det T(x, y)|^{-1}.$$

Comme  $G$  et  $T$  sont des applications lisses, on peut établir les estimations suivantes laissées en exercices :

$$\|c\|_{N, m'} \leq K \|a\|_{N+k', m'}, \quad \|c\|_{N, m} \leq K \|a\|_{N+k, m}.$$

Donc  $a \in \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \implies c \in \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^n)$  et un argument de densité de  $\mathcal{S}_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}_\infty^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  pour la topologie induite par celle de  $\mathcal{S}_\infty^{m'}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  permet de conclure que

$$(A_\epsilon)_F \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \quad \text{avec} \quad K_{(A_\epsilon)_F} = I(c).$$

□

### 3.2 Définition des opérateurs pseudodifférentiels sur une variété fermée

Soit  $X$  une variété lisse de dimension  $n$ . On suppose qu'elle est fermée, c'est-à-dire qu'elle est compacte et sans bord. Sur  $X$ , on peut aisément définir les opérateurs régularisants en termes de leur noyau de Schwartz :

$$Q \in \Psi^{-\infty}(X) \iff K_Q \in \mathcal{C}^\infty(X \times X; \Omega_D), \quad (3.5)$$

où  $\Omega_D = \pi_D^* \Omega$  avec  $\pi_D : X \times X \rightarrow X$  la projection sur le facteur de droite et  $\Omega = |\Lambda^n(T^*X)| \rightarrow X$  est le fibré des densités. Contrairement à une  $n$ -forme, une densité peut

toujours être intégrée canoniquement, et ce, même si la variété  $X$  n'est pas orientée ou orientable. L'action de  $Q$  sur les fonctions lisses  $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$  est alors donnée par

$$(Qf)(x) = \int_X K_Q(x, x')f(x'),$$

où l'intégration se fait en  $x'$  avec la densité déjà incluse dans le noyau de Schwartz  $K_Q$ . Remarquons que l'espace  $\mathcal{C}^\infty(X)$  est naturellement un espace de Fréchet. Si  $\{\mathcal{U}_i\}$  est un recouvrement fini de  $X$  par des cartes locales  $F_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $\mathcal{U}_i \Subset \mathcal{V}_i$  pour une carte locale  $F_i : \mathcal{V}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  plus grande, alors la topologie de  $\mathcal{C}^\infty(X)$  est en fait induite par les semi-normes

$$\|u\|_{\mathcal{U}_i, k} = \sup_{x \in F(\mathcal{U}_i)} \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha((F_i^{-1})^*u)(x)|.$$

Par rapport à cette topologie, un opérateur régularisant  $Q \in \Psi^{-\infty}(X)$  induit une application linéaire continue

$$Q : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X).$$

Pour définir des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre plus grand, il faut permettre au noyau de Schwartz d'avoir des singularités le long de la diagonale

$$\mathfrak{D}_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}.$$

Grâce au Théorème 3.3, cela peut se faire de manière cohérente en utilisant des cartes locales.

**Définition 3.4.** Un opérateur linéaire continu  $A : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$  est un **opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $m$**  sur  $X$  si :

- (i) Pour  $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(X)$  des fonctions ayant des supports disjoints, il existe  $K \in \mathcal{C}^\infty(X \times X; \Omega_D)$  tel que pour tout  $u \in \mathcal{C}^\infty(X)$ ,

$$\phi(x)(A(\psi u))(x) = \int_X K(x, y)u(y);$$

- (ii) Pour toute carte locale  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur un ouvert  $\mathcal{U} \subset X$ , ainsi que pour tout  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{U})$ , il existe  $B \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$\psi A(\psi u) = F^*(B((F^{-1})^*(\psi u))) \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(X).$$

On dénote par  $\Psi^m(X)$  l'espace des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre  $m$  sur  $X$ .

**Exemple 3.5.** Chaque opérateur différentiel sur  $X$  est un opérateur pseudodifférentiel.

### 3.3 Symbole principal

Soit  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  un recouvrement de  $X$  par des cartes locales  $F_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soient  $\rho_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{U}_i)$  des fonctions telles que  $\{\rho_i^2\}_{i \in \mathcal{I}}$  est une partition de l'unité pour le recouvrement  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ . Pour  $A \in \Psi^m(X)$ , on peut pour chaque  $i \in \mathcal{I}$  considérer l'opérateur

$$A_i = \rho_i \circ A \circ \rho_i$$



avec noyau de Schwartz

$$K_{A_i}(x, y) = \rho_i(x)K_A(x, y)\rho_i(y),$$

où  $K_A$  est le noyau de Schwartz de  $A$  sur  $X \times X$ . En termes de la carte  $F_i$ , il y a un noyau  $K_i$  tel que

$$K_{A_i}(x, y) = (F_i \times F_i)^* K_i(x, y) d(F_i(y)).$$

Par définition de  $\Psi^m(X)$ , pour chaque  $i \in \mathcal{I}$ , il existe un symbole  $a_i \in \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  tel qu'au sens des distributions,

$$K_i(x, y) = \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} a_i(x, \xi) d\xi \right) dy.$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^m(T^*X) &= \sum \rho_i^2 F_i^* \mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \\ \mathcal{S}^{m-1}[T^*X] &= \mathcal{S}^m(T^*X) / \mathcal{S}^{m-1}(T^*X), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'identification  $T^*X|_{\mathcal{U}_i} \cong T^*\mathbb{R}^n|_{F_i(\mathcal{U}_i)} = F_i(\mathcal{U}_i) \times \mathbb{R}^n_\xi$ .

**Définition 3.6.** Le **symbole principal** d'un opérateur  $A \in \Psi^m(X)$  est la classe d'équivalence  $\sigma_m(A) \in \mathcal{S}^{m-1}[T^*X]$  donnée par

$$\sigma_m(A)(\tau) = \sum_{i, \pi(\tau) \in \text{supp}(\rho_i)} a_i(x_i, \xi_i), \quad \tau \in T^*X$$

où  $\pi : T^*X \rightarrow X$  est la projection canonique et  $\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^n) \in \mathbb{R}^n$  est tel que

$$\tau = F_i^* \left( (F_i(\pi(\tau)), \sum_j \xi_i^j dx_j) \right), \quad (F_i(\pi(\tau)), \sum_j \xi_i^j dx_j) \in T^*\mathbb{R}^n.$$

**Proposition 3.7.** *Le symbole principal de  $A$  est indépendant du choix de recouvrement  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  et de la partition de l'unité  $\{\rho_i^2\}_{i \in \mathcal{I}}$ . De plus, il donne lieu à une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \Psi^{m-1}(X) \longrightarrow \Psi^m(X) \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{S}^{m-1}[T^*X] \longrightarrow 0. \quad (3.6)$$

*Démonstration.* D'abord, si  $\{\varphi_i^2\}_{i \in \mathcal{I}}$  est un autre choix de partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ , alors modulo les noyaux de Schwartz d'opérateurs dans  $\Psi^{m-1}(X)$ , on a que

$$\begin{aligned} \varphi_j(x)K_A(x, y)\varphi_j(y) &= \varphi_j(x)^2 K_A(x, y) + \varphi_j(x)(\varphi_j(y) - \varphi_j(x))K_A(x, y) \\ &= \varphi_j(x)^2 K_A(x, y) + \varphi_j(x)K_{[A, \varphi_j]}(x, y) \\ &\equiv \varphi_j^2(x)K_A(x, y), \quad \text{car } [A, \varphi_j] \in \Psi^{m-1}(X), \\ &= \sum_i \varphi_j^2(x)\rho_i^2(x)K_A(x, y) \\ &= \sum_i \varphi_j^2(x) (\rho_i(x)K_A(x, y)\rho_i(y) + \rho_i(x)K_{[\rho_i, A]}) \\ &\equiv \sum_i \varphi_j^2(x)\rho_i(x)K_A(x, y)\rho_i(y), \quad \text{car } [\rho_i, A] \in \Psi^{m-1}(X). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ainsi, si  $\tilde{\sigma}_m(A)$  dénote le symbole principal par rapport la partition de l'unité  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ , alors

$$\tilde{\sigma}_m(A) = \sum_{j \in \mathcal{I}} \varphi_j^2(x) \sigma_m(A) = \sigma_m(A) \in \mathcal{S}^{m-[1]}(T^*X),$$

d'où l'indépendance du choix de partition de l'unité. Supposons maintenant que  $\{\mathcal{W}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  est un autre recouvrement par des cartes locales  $G_j : \mathcal{W}_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ . En utilisant une partition de l'unité  $\{\varphi_{ij}\}_{ij \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  telle que  $\text{supp } \varphi_{ij} \subset \mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}_j$ , il suffit, pour établir l'indépendance du choix de recouvrement, de montrer que  $\sigma_m(A)$  se transforme de la manière attendue sous un changement de coordonnées.

Soit donc  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$  un difféomorphisme pour des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\Omega \cong \mathcal{U}_i \cap \mathcal{W}_j$ . Dans la preuve de l'invariance par changement de coordonnées, le changement de symbole sous un difféomorphisme est donné par

$$a(x, y, \xi) \mapsto a(G(x), G(y), (T(x, y)^T)^{-1}\xi) |\det(T(x, y))|^{-1} |J_G(y)|, \quad G = F^{-1}.$$

Or, le symbole principal reste le même si on pose  $x = y$ . Comme  $T(x, x) = dG(x)$ , on a que

$$a(x, x, \xi) \mapsto a(G(x), G(x), (dG(x)^T)^{-1}\xi) \in \mathcal{S}^m(T^*\Omega'). \quad (3.8)$$

C'est précisément comment une fonction sur  $T^*\Omega$  se transforme sous un changement de coordonnées :

$$y = F(x) \implies dy^j = \sum_i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \implies \sum_j \xi_j dy^j = \sum_{i,j} \xi_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \longrightarrow \xi \mapsto dF^T(\xi).$$

Ainsi, le difféomorphisme  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$  avec inverse  $G$  induit l'application

$$\begin{aligned} F^* : T^*\Omega' &\rightarrow T^*\Omega \\ (x, \xi) &\mapsto (G(x), dF^T(\xi)) = (G(x), (dG^T)^{-1}\xi), \end{aligned}$$

et donc une application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(T^*\Omega) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(T^*\Omega') \\ a &\mapsto a \circ F^* \end{aligned}$$

avec  $a \circ F^*(x, \xi) = a(G(x), (dG(x)^T)^{-1}\xi)$ . Autrement dit, le symbole principal se transforme bien comme une fonction sur  $T^*\Omega$ , donc que  $\sigma_m(A) \in \mathcal{S}^{m-[1]}(T^*X)$  est bien défini. L'exactitude de la suite est claire. □

Presque toutes les propriétés que nous avons établies pour  $\Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$  on un analogue pour  $\Psi^m(X)$  :

- (i) Composition : en utilisant des partitions de l'unité, on se ramène au cas de la composition sur  $\mathbb{R}^n$  ;
- (ii) Régularité elliptique et construction de paramétrices ;
- (iii) Action sur les espaces de Sobolev.

**Définition 3.8.** un opérateur  $A \in \Psi^m(X)$  est **elliptique** si son symbole principal  $\sigma_m(A)$  est inversible au sens où il existe  $\sigma_m(A)^{-1} \in \mathcal{S}^{-m-[1]}(T^*X)$  tel que

$$\sigma_m(A)^{-1}\sigma_m(A) = \sigma(A)\sigma_m(A)^{-1} = 1$$

dans  $\mathcal{S}^{0-[1]}(T^*X)$ .

**Théorème 3.9.** Si  $A \in \Psi^m(X)$  est elliptique, il existe  $B \in \Psi^{-m}(X)$  tel que

$$R_1 = BA - \text{Id} \in \Psi^{-\infty}(X) \quad \text{et} \quad R_2 = AB - \text{Id} \in \Psi^{-\infty}(X).$$

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle sur  $\mathbb{R}^n$  mais la sommation asymptotique est prise dans  $\mathcal{S}^m(T^*X)$ .  $\square$

**Corollaire 3.10** (régularité elliptique). Soit  $A \in \Psi^m(X)$  est un opérateur elliptique. Pour  $k, \ell \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $u \in L^2_k(X)$  et  $v \in L^2_\ell(X)$  sont des fonctions telles que

$$Au = v,$$

alors

$$\|u\|_{L^2_{k+m}} \leq C \left( \|v\|_{L^2_\ell} + \|u\|_{L^2_\ell} \right).$$

En particulier, si  $u$  est une distribution telle que  $Au \in \mathcal{C}^\infty(X)$ , alors en fait  $u \in \mathcal{C}^\infty(X)$ .

*Démonstration.* On utilise la paramétrice du Théorème 3.9 et on procède comme dans les preuves du Corollaire 2.38 et du Théorème 2.31.  $\square$

### 3.4 Espaces de Sobolev sur une variété fermée

Sur une variété fermée  $X$  munie d'une métrique riemannienne  $g$ , on pose

$$L^2(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^2 dg < \infty \right\}, \quad (3.9)$$

où  $dg$  est la densité associée à  $g$ . C'est un espace d'Hilbert avec produit scalaire

$$\langle f, h \rangle_{L^2} = \int_X f \bar{h} dg, \quad \|f\|_{L^2}^2 = \int_X |f|^2 dg. \quad (3.10)$$

Évidemment, la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$  dépend du choix de  $g$ , mais la topologie induite elle ne dépend pas de ce choix.

**Définition 3.11.** Pour  $k \in \mathbb{R}$ , l'espace de Sobolev d'ordre  $k$  sur  $X$  est donné par

$$L^2_k(X) = \{f \in \mathcal{C}^{-\infty}(X) \mid Pf \in L^2(X) \forall P \in \Psi^k(X)\}.$$

La topologie de  $L^2_k(X)$  est l'unique topologie telle que  $P : L^2_k(X) \rightarrow L^2(X)$  est continue pour tout  $P \in \Psi^k(X)$ .

Étant donnée la définition des opérateurs pseudodifférentiels sur  $X$ , on a que  $u \in L_k^2(X)$  si et seulement si pour toute carte locale  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et pour tout  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{U})$ ,

$$F_*(\rho u) := (F^{-1})^*(\rho u) \in L_k^2(\mathbb{R}^n).$$

Avec un recouvrement fini  $\{(\mathcal{U}_i, F_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$  de cartes locales et une partition de l'unité associée  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ , on peut définir une norme induisant la topologie de  $L_k^2(X)$ ,

$$\|u\|_{L_k^2(X)} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \|(F_i)_*(\varphi_i u)\|_{L_k^2} \quad (3.11)$$

avec produit scalaire associé

$$\langle u, v \rangle_{L_k^2(X)} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle (F_i)_*(\varphi_i u), (F_i)_*(\varphi_i v) \rangle_{L_k^2}.$$

L'espace de Sobolev  $L_k^2(X)$  peut donc être vu comme un espace d'Hilbert.

Notre manière de définir les espaces de Sobolev sur  $X$  implique immédiatement qu'un opérateur  $A \in \Psi^m(X)$  induit une application linéaire continue  $A : L_m^2(X) \rightarrow L^2(X)$ . Plus généralement, on a le résultat suivant.

**Théorème 3.12.** *Un opérateur  $A \in \Psi^m(X)$  définit une application linéaire continue*

$$A : L_{k+m}^2(X) \rightarrow L_k^2(X)$$

pour tout  $k \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Soit  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  un recouvrement fini de cartes locales. Alors  $\{\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_i\}$  est un recouvrement fini de la diagonale  $\mathfrak{D}_X$  dans  $X \times X$ . Soit  $\rho_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_i)$  une partition de l'unité au sens où  $\sum_i \rho_i \equiv 1$  dans un voisinage de la diagonale. Soit  $A_i$  l'opérateur avec noyau de Schwartz  $\rho_i K_A$ . Alors par le Théorème 2.37 appliqué à  $(F_i)_* \circ A_i \circ F_i^* \in \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n)$ , on voit que  $A_i$  induit une application linéaire continue

$$A_i : L_{k+m}^2(X) \rightarrow L_k^2(X).$$

Or,  $A - \sum_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \Psi^{-\infty}(X)$ , puisque le support de son noyau de Schwartz est disjoint de la diagonale. On peut donc supposer que  $A \in \Psi^{-\infty}(X)$ . Dans ce cas, si  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  est une partition de l'unité associée à  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ , le résultat découle en appliquant le Théorème 2.37 aux opérateurs

$$(F_j)_* \circ \varphi_j \circ A \circ \varphi_i \circ F_i^*$$

pour  $i, j \in \mathcal{I}$ . □

En ce qui concerne la compacité des inclusions d'espaces de Sobolev, on a l'analogie suivant du Théorème 2.44.

**Théorème 3.13.** *Pour  $k \geq k'$ , l'inclusion  $L_k^2(X) \subset L_{k'}^2(X)$  est compacte si et seulement si  $k > k'$ .*

*Démonstration.* Si  $k = k'$ , l'inclusion correspond à l'application identité  $\text{Id} : L_k^2(X) \rightarrow L_k^2(X)$  et une suite donnée par une base hilbertienne de  $L_k^2(X)$  n'admet pas de sous-suite convergente. Si  $k > k'$ , soit  $\{u_j\}$  une suite bornée de  $L_k^2(X)$ . Si  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  est une partition de l'unité associée à un recouvrement fini de  $X$  par des cartes locales  $F_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors il suffit d'appliquer le Théorème 2.44 aux suites  $\{\varphi_i u_j\}$  pour chaque  $i$  pour obtenir une sous-suite  $\{u_{j_i}\}$  convergeant dans  $L_{k'}^2(X)$ .  $\square$

**Corollaire 3.14.** *Un opérateur  $A \in \Psi^{-\delta}(X)$  pour  $\delta > 0$  induit un opérateur compact*

$$A : L_k^2(X) \rightarrow L_k^2(X)$$

pour tout  $k \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Comme on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_k^2(X) & \xrightarrow{A} & L_{k+\delta}^2(X) \\ & \searrow A & \downarrow \\ & & L_k^2(X) \end{array}$$

avec la flèche verticale correspondant à l'inclusion  $L_{k+\delta}^2(X) \subset L_k^2(X)$ , le résultat découle donc des Théorèmes 3.12 et 3.13.  $\square$

Ce dernier résultat à d'importantes conséquences pour les opérateurs pseudodifférentiels, notamment pour les opérateurs elliptiques.

### 3.5 Opérateurs de Fredholm

On peut utiliser le résultat de compacité du Corollaire 3.14 pour montrer que l'action naturelle d'un opérateur elliptique sur un espace de Sobolev est un exemple d'opérateur de Fredholm. Avant d'arriver à ce résultat, il est souhaitable dans un premier temps de présenter les bases de la théorie des opérateurs de Fredholm.

**Définition 3.15.** Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire continu  $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  entre deux espaces de Banach est **de Fredholm** si  $\ker T$  et  $\text{coker } T := \mathcal{B}_2/T(\mathcal{B}_1)$  sont de dimensions finies. Dans ce cas, **l'indice** de  $T$  est

$$\text{ind}(T) = \dim(\ker T) - \dim(\text{coker } T).$$

Comme l'indique le lemme suivant, l'image d'un opérateur de Fredholm est automatiquement fermée.

**Lemme 3.16.** *Si le conoyau  $\text{coker } T$  d'un opérateur linéaire continu  $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  est de dimension finie, alors son image  $T(\mathcal{B}_1)$  est fermée dans  $\mathcal{B}_2$ .*

*Démonstration.* Comme  $T$  est continu, le noyau  $\ker T$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{B}_1$ . En remplaçant au besoin  $\mathcal{B}_1$  par le quotient  $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}_1 / \ker T$  muni de la norme

$$\|u\|_0 = \inf_{v \in \ker T} \|u - v\|_1,$$

on peut donc supposer sans perte de généralité que  $T$  est injectif. Maintenant, par hypothèse, il existe un sous-espace  $W \subset \mathcal{B}_2$  de dimension finie tel que

$$\mathcal{B}_2 = T(\mathcal{B}_1) \oplus W.$$

Alors l'opérateur

$$\begin{aligned} T_1 : \mathcal{B}_1 \oplus W &\rightarrow \mathcal{B}_2 \\ (u, w) &\mapsto Tu + w \end{aligned}$$

est une bijection. Par le théorème de l'application ouverte, son inverse est continu, donc

$$T(\mathcal{B}_1) = T_1(\mathcal{B}_1 \oplus \{0\})$$

est bien un sous-espace fermé. □

**Exemple 3.17.** Si  $\mathcal{B}_1 = \mathbb{C}^m$  et  $\mathcal{B}_2 = \mathbb{C}^n$ , toute application linéaire  $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  est de Fredholm. De plus,

$$\dim \mathcal{B}_1 = \dim \ker T + \dim T(\mathcal{B}_1) \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{B}_2 = \dim \text{coker } T + \dim T(\mathcal{B}_1),$$

de sorte que l'indice est donné par

$$\text{ind}(T) = \dim \mathcal{B}_1 - \dim \mathcal{B}_2 = m - n.$$

En dimensions finies, l'indice de  $T$  ne dépend donc que des dimensions de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ .

**Exemple 3.18.** Si  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une base d'un espace d'Hilbert  $\mathcal{H}$ , soit  $T_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  l'opérateur défini par  $T_k f_i = f_{i+k}$ . Alors  $T_k$  est Fredholm avec  $\ker T_k = \{0\}$  et  $\{f_1, \dots, f_k\}$  est une base de  $\text{coker } T_k$ , donc  $\text{ind } T_k = -k$ . Pour  $k \in \mathbb{N}_0$ , on peut aussi définir un opérateur de Fredholm  $T_{-k} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  par

$$T_{-k} f_i = \begin{cases} 0, & i \leq k, \\ f_{i-k}, & i > k, \end{cases}$$

dont l'indice est  $\text{ind } T_{-k} = -k$ .

Il est utile de considérer une situation plus générale où  $\dim \ker T < \infty$  et l'image de  $T$  est fermée, mais où  $\text{coker } T$  n'est pas nécessairement de dimension finie.

**Proposition 3.19.** Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux espaces de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes pour  $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  un opérateur borné :

- (i)  $\dim \ker T < \infty$  et  $T(\mathcal{B}_1)$  est fermé dans  $\mathcal{B}_2$  ;
- (ii) Chaque suite  $\{f_j\}$  bornée dans  $\mathcal{B}_1$  telle que  $T f_j$  converge dans  $\mathcal{B}_2$  possède une sous-suite convergente dans  $\mathcal{B}_1$ .

*Démonstration.* (ii)  $\implies$  (i) : Dans ce cas, la boule unité de  $\ker T$  est compacte, donc  $\ker T$  doit être de dimension finie. Par le théorème de Hahn-Banach,  $\ker T$  possède un supplémentaire topologique  $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1$  :

$$\mathcal{B}_1 = \ker T \oplus \mathcal{B}_0.$$

Par la condition (ii), il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|f\|_1 \leq C\|Tf\|_2 \quad \forall f \in \mathcal{B}_0, \quad (3.12)$$

où  $\|\cdot\|_i$  est la norme de  $\mathcal{B}_i$ . En effet, sinon, il existerait une suite  $\{f_j\}$  de  $\mathcal{B}_0$  avec  $\|f_j\|_1 = 1$ , mais  $\|Tf_j\|_2 < \frac{1}{j}$ . Donc  $Tf_j \rightarrow 0$ , ce qui par la condition (ii) indiquerait qu'il existe une sous-suite  $\{f_{j_i}\}$  convergeant vers un certain  $f \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1$  tel que  $Tf = 0$ , donc vers  $f = 0$ , contredisant le fait que  $\|f_{j_i}\|_1 = 1$  pour tout  $i$ . On a donc bien une estimation de la forme (3.12), ce qui implique que l'image de  $T$  est fermée.

(i)  $\implies$  (ii) : Soit  $\{f_j\}$  une suite bornée de  $\mathcal{B}_1$  telle que  $\{Tf_j\}$  converge dans  $\mathcal{B}_2$  vers  $q \in \mathcal{B}_2$ . Écrivons  $f_j = g_j + h_j$  avec  $g_j \in \ker T$  et  $h_j \in \mathcal{B}_0$ , où  $\mathcal{B}_0$  est un choix de supplémentaire topologique pour  $\ker T \subset \mathcal{B}_1$ . Or, comme  $T$  est injectif lorsque restreint à  $\mathcal{B}_0$ , le théorème de l'application ouverte montre qu'il existe une constante  $C$  telle qu'on a de nouveau l'estimation (3.12). Comme

$$Th_j = Tf_j \implies Th_j \rightarrow q \in \mathcal{B}_2,$$

cela montre que la suite  $\{h_j\}$  est convergente. En particulier, la suite  $\{h_j\}$  est bornée, ce qui implique que la suite  $g_j = f_j - h_j$  est aussi bornée. Puisque  $\ker T$  est de dimension finie, on peut extraire une sous-suite  $\{g_{j_i}\}$  qui converge dans  $\ker T$ , de sorte que la sous-suite  $f_{j_i} = g_{j_i} + h_{j_i}$  converge dans  $\mathcal{B}_1$ .  $\square$

**Définition 3.20.** On dénote par  $\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  l'espace des opérateurs linéaires continus de  $\mathcal{B}_1$  vers  $\mathcal{B}_2$ . Il est muni de la norme

$$\|T\| = \sup\{\|Tf\|_2 \mid f \in \mathcal{B}_1, \|f\|_1 = 1\} = \sup\left\{\frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_1} \mid f \in \mathcal{B}_1 \setminus \{0\}\right\}.$$

**Proposition 3.21.** Si  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  satisfait l'une des assertions de la Proposition 3.19, alors il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ ,

$$\|S\| < C \implies \begin{cases} 1) \dim \ker(T + S) \leq \dim \ker T, \\ 2) (T + S)(\mathcal{B}_1) \text{ est fermé dans } \mathcal{B}_2, \\ 3) \operatorname{ind}(T + S) = \operatorname{ind}(T) \quad (\operatorname{ind}(T) = -\infty \text{ lorsque } \dim \operatorname{coker} T = \infty). \end{cases}$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $T$  est une bijection. Par le théorème de l'application ouverte, on sait alors que  $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ . Ainsi,  $T + S = T(\operatorname{Id} + T^{-1}S)$  est une bijection pourvu que  $\|T^{-1}S\| < 1$ , c'est-à-dire dès que

$$\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

La proposition est donc vérifiée dans ce cas.

Si maintenant  $T$  est injectif, alors par le théorème de l'application ouverte, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|f\|_1 \leq C\|Tf\|_2 \leq C\|(T+S)f\|_2 + C\|S\|\|f\|_1 \quad \forall f \in \mathcal{B}_1.$$

Pourvu que  $\|S\| < \frac{1}{2C}$ , on a alors que

$$\|f\|_1 < 2C\|(T+S)f\|_2,$$

ce qui montre que  $T+S$  est injectif avec une image fermée. Reste donc à établir la propriété 3) dans ce cas. Pour ce faire, supposons d'abord que  $\dim \text{coker } T < \infty$ . On peut alors trouver un supplémentaire topologique  $W \subset \mathcal{B}_2$  de  $T(\mathcal{B}_1)$ . Soit  $q : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_2/W$  la projection canonique. Alors

$$q \circ T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2/W$$

est une bijection, donc par l'argument précédent,  $q \circ (T+S) : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2/W$  est aussi une bijection pour  $\|S\|$  assez petit. Ainsi,

$$\text{ind}(T+S) = -\dim W = \text{ind } T$$

et la propriété 3) est vérifiée. Si au contraire, on sait seulement que  $\dim \text{coker } T > \nu$ , alors il existe un sous-espace  $W \subset \mathcal{B}_2$  de dimension  $\nu+1$  tel que  $W \cap T(\mathcal{B}_1) = \{0\}$ , c'est-à-dire que  $q \circ T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2/W$  reste injectif. Donc par le théorème de l'application ouverte, pour  $\|S\|$  assez petit,  $q \circ (T+S)$  sera aussi injectif, de sorte que  $\dim \text{coker}(T+S) > \nu$ .

En appliquant ces résultats à  $T+S$  avec  $\|S\| < \frac{1}{2C}$ , on voit que

$$\{S \mid \|S\| < \frac{1}{2C}, \dim \text{coker}(T+S) > \nu\} \quad \text{et} \quad \{S \mid \|S\| < \frac{1}{2C}, \dim \text{coker}(T+S) = \nu\}$$

sont ouverts dans  $\{S \mid \|S\| < \frac{1}{2C}\}$  pour  $\nu \in \mathbb{N}_0$ . Comme cet ensemble est connexe, il faut donc que  $\dim \text{coker}(T+S)$  soit constant sur cet ensemble, d'où

$$\dim \text{coker}(T+S) = \infty.$$

Finalement, supposons que  $N = \ker T \neq \{0\}$ . Par le théorème de Hahn-Banach, il existe un supplémentaire topologique  $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1$  à  $N$  :

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \oplus N.$$

Par l'argument précédent,  $(T+S)|_{\mathcal{B}_0}$  est injectif avec image fermée pour  $\|S\|$  assez petit et

$$\text{codim}((T+S)(\mathcal{B}_0)) = \text{codim } T(\mathcal{B}_0) = \text{codim } T(\mathcal{B}_1).$$

Posons  $N' = \ker(T+S)$  de sorte que  $N' \cap \mathcal{B}_0 = \{0\}$  et  $\mathcal{B}_1 = N' \oplus W \oplus \mathcal{B}_0$  avec  $W$  un sous-espace vectoriel de dimension finie. En particulier,  $N \cong N' \oplus W$ . Dans ce cas,

$$\dim \ker(T+S) \leq \dim \ker T,$$



$T + S$  a une image fermée et

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(T + S) &= \dim N' - (\operatorname{codim}(T + S)(\mathcal{B}_0) - \dim W) \\ &= \dim N' + \dim W - \operatorname{codim} T(\mathcal{B}_1) \\ &= \dim N - \operatorname{codim} T(\mathcal{B}_1) = \operatorname{ind} T.\end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.22** (Invariance par homotopie). *L'indice  $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \rightarrow \mathbb{Z}$  est une fonction continue sur le sous-ensemble ouvert  $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \subset \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  des opérateurs de Fredholm. En particulier, c'est une fonction localement constante.*

**Remarque 3.23.** Pour  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ , l'indice induit une bijection

$$\operatorname{ind} : \pi_0(\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H})) \rightarrow \mathbb{Z},$$

voir par exemple [Ati67].

**Corollaire 3.24.** *Si  $T \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  et  $K \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  est un opérateur compact, alors  $T + K$  est de Fredholm avec*

$$\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T.$$

*Démonstration.* Si  $\{f_j\}$  est une suite bornée de  $\mathcal{B}_1$  telle que  $(T + K)f_j$  converge dans  $\mathcal{B}_2$ , alors puisque  $K$  est compact, on peut extraire une sous-suite  $\{f_{j_i}\}$  telle que  $\{Kf_{j_i}\}$  converge dans  $\mathcal{B}_2$ . On en déduit que  $Tf_{j_i} = (T + K)f_{j_i} - Kf_{j_i}$  converge aussi dans  $\mathcal{B}_2$ . Comme  $T$  est Fredholm, par la Proposition 3.19, en extrayant une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que  $\{f_{j_i}\}$  converge dans  $\mathcal{B}_1$ . Par la Proposition 3.19, cela montre que  $\dim \ker(T + K) < \infty$  et que l'image de  $T + K$  est fermée.

Or, on a le même résultat pour  $T + zK$  avec  $z \in \mathbb{C}$ . Comme  $\mathbb{C}$  est connexe, on conclut par la Proposition 3.21 que  $\operatorname{ind}(T + zK) = \operatorname{ind}(T)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . □

Pour le prochain corollaire, nous aurons besoin d'introduire la notion d'adjoint.

**Définition 3.25.** L'espace dual d'un espace de Banach  $\mathcal{B}_1$  est l'espace de Banach  $\mathcal{B}_1^*$  des fonctionnelles linéaires continues  $f : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{B}_1^*} = \sup\{|f(u)| \mid u \in \mathcal{B}_1, \|u\|_1 = 1\}.$$

De même, l'adjoint d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  est l'opérateur  $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*)$  donné par

$$(T^*f)(u) = f(Tu), \quad \text{pour } f \in \mathcal{B}_2^*, u \in \mathcal{B}_1.$$

**Lemme 3.26.** *Si l'image d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  est fermée, on a une identification canonique*

$$\ker T^* \cong (\operatorname{coker} T)^*.$$

*Démonstration.* Dans ce cas,  $\text{coker } T = \mathcal{B}_2/T(\mathcal{B}_1)$  est un espace de Banach et son dual est naturellement identifiée avec les fonctionnelles linéaires continues

$$f : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

s'annulant sur  $T(\mathcal{B}_1)$ , donc telles que  $T^*f = f \circ T = 0$ . □

**Corollaire 3.27.** *Si  $T_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  et  $T_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$  sont des opérateurs de Fredholm, alors  $T_2T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$  est aussi un opérateur de Fredholm avec*

$$\text{ind}(T_2T_1) = \text{ind}(T_2) + \text{ind}(T_1).$$

*Démonstration.* Comme  $T_1$  et  $T_2$  sont de Fredholm, ils satisfont à la propriété (ii) de la Proposition 3.19. Clairement,  $T_2T_1$  satisfera aussi à cette propriété, donc par la Proposition 3.19,

$$\dim \ker(T_2T_1) < \infty$$

et l'image de  $T_2T_1$  est fermée. Ainsi, on aura que

$$\dim \text{coker}(T_2T_1) = \dim \ker((T_2T_1)^*) = \dim \ker T_1^*T_2^*.$$

Or, comme  $T_2^*$  induit une application  $T_2^* : \ker(T_1^*T_2^*) \rightarrow \ker(T_1^*)$  ayant pour noyau  $\ker T_2^*$ , on aura que

$$\begin{aligned} \dim \text{coker}(T_2T_1) &= \dim \ker T_1^*T_2^* \leq \dim \ker T_1^* + \dim \ker T_2^* \\ &= \dim \text{coker } T_1 + \dim \text{coker } T_2 < \infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $T_2T_1$  est bien un opérateur de Fredholm. Pour relier son indice avec ceux de  $T_1$  et  $T_2$ , considérons l'homotopie

$$A(t) = \begin{pmatrix} \text{Id}_2 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id}_2 \cos t & -\text{Id}_2 \sin t \\ \text{Id}_2 \sin t & \text{Id}_2 \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & \text{Id}_2 \end{pmatrix}$$

avec  $A(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2 \oplus \mathcal{B}_3)$ . Par le résultat précédent,  $A(t)$  est de Fredholm pour tout  $t$ . Comme

$$A(0) = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_2 \\ T_2T_1 & 0 \end{pmatrix},$$

on voit par l'invariance par homotopie de l'indice du Corollaire 3.22 que

$$\text{ind}(T_1) + \text{ind}(T_2) = \text{ind } A(0) = \text{ind } A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{ind}(T_2T_1).$$

□

**Corollaire 3.28.** *Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  est de Fredholm si et seulement s'il existe  $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$  tels que*

$$S_1T = \text{Id}_1 + K_1 \quad \text{et} \quad TS_2 = \text{Id}_2 + K_2$$

avec  $K_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$  et  $K_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$  des opérateurs compacts. Dans ce cas,  $S_1$  et  $S_2$  sont aussi de Fredholm avec

$$\text{ind}(S_j) = -\text{ind}(T), \quad j = 1, 2.$$

*Démonstration.*  $\implies$ ) Si  $T$  est de Fredholm, alors il existe un supplémentaire topologique  $\mathcal{B}_0$  de  $\ker T$  dans  $\mathcal{B}_1$  et un supplémentaire topologique  $W$  de  $T(\mathcal{B}_1)$  dans  $\mathcal{B}_2$  :

$$\mathcal{B}_1 = \ker T \oplus \mathcal{B}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = T(\mathcal{B}_1) \oplus W. \quad (3.13)$$

En particulier,  $T$  induit une bijection  $T : \mathcal{B}_0 \rightarrow T(\mathcal{B}_1)$  et son inverse  $S'$  est une application linéaire continue. Soit  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$  l'opérateur donné par  $S|_{T(\mathcal{B}_1)} = S'$  et  $S(w) = 0$  pour tout  $w \in W$ . Alors

$$ST = \text{Id} - \Pi_1 \quad \text{et} \quad TS = \text{Id} - \Pi_2$$

avec  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  les projections sur  $\ker T$  et  $W \cong \text{coker } T$  induites par les décompositions (3.13). Comme  $\ker T$  et  $W$  sont de dimensions finies, les projections  $\Pi_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$  et  $\Pi_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$  sont automatiquement compactes.

$\impliedby$ ) Si on a  $S_1$  et  $S_2$  comme dans l'énoncé, alors  $T$  est de Fredholm, car par le Corollaire 3.24,

$$\dim \ker T \leq \dim \ker(\text{Id} + K_1) < \infty \quad \text{et} \quad \dim \text{coker } T \leq \dim \text{coker}(\text{Id} + K_2) < \infty.$$

Pour voir que  $S_1$  et  $S_2$  sont nécessairement de Fredholm, notons que

$$S_1 T S_2 = S_1 + S_1 K_2 = S_2 + K_1 S_2,$$

ce qui montre que  $S_1 - S_2$  est compact. Ainsi,  $S_2 T - \text{Id}_1$  et  $T S_1 - \text{Id}_2$  sont aussi compacts, ce qui montre par l'argument ci-haut que  $S_1$  et  $S_2$  sont de Fredholm. Par les Corollaires 3.24 et 3.27, on a donc que

$$\text{ind}(T) + \text{ind}(S_j) = \text{ind}(\text{Id}_j + K_j) = \text{ind}(\text{Id}_j) = 0,$$

c'est-à-dire que  $\text{ind}(S_j) = -\text{ind}(T)$ . □

### 3.6 Quelques conséquences pour les opérateurs elliptiques

Le Corollaire 3.28 a la conséquence suivante pour les opérateurs elliptiques sur une variété fermée.

**Théorème 3.29.** *Pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , un opérateur elliptique  $A \in \Psi^m(X)$  induit un opérateur de Fredholm*

$$A : L_{k+m}^2(X) \rightarrow L_k^2(X). \quad (3.14)$$

*Démonstration.* Puisque  $A$  est elliptique, il existe une paramétrice  $B \in \Psi^{-m}(X)$  telle que

$$E_1 = AB - \text{Id} \in \Psi^{-\infty}(X) \quad \text{et} \quad E_2 = BA - \text{Id} \in \Psi^{-\infty}(X).$$

Par le Théorème 3.12, l'opérateur  $B$  induit une application linéaire continue

$$B : L_k^2(X) \rightarrow L_{k+m}^2(X)$$

pour tout  $k \in \mathbb{R}$ . De plus, par le Corollaire 3.14,  $E_1$  et  $E_2$  induisent des opérateurs compacts

$$E_1 : L_k^2(X) \rightarrow L_k^2(X) \quad \text{et} \quad E_2 : L_{k+m}^2(X) \rightarrow L_{k+m}^2(X)$$

pour tout  $k \in \mathbb{R}$ . Le résultat découle donc du Corollaire 3.28. □

Par régularité elliptique,  $\ker A \subset \mathcal{C}^\infty(X)$  et le noyau de l'opérateur (3.14) ne dépend pas du choix de  $k$ . En fait, il en est de même pour l'indice de l'opérateur (3.14). Pour le voir, remarquons dans un premier temps que sur  $\mathbb{R}^n$ , on voit en utilisant la transformé de Fourier et la description (2.47) que le produit scalaire  $L^2$  se prolonge en un couplage non-dégénéré

$$\begin{aligned} L_k^2(\mathbb{R}^n) \times L_{-k}^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}} d\xi. \end{aligned}$$

Ce couplage établit donc une relation de dualité entre  $L_k^2(\mathbb{R}^n)$  et  $L_{-k}^2(\mathbb{R}^n)$  permettant d'identifier le dual de  $L_k^2(\mathbb{R}^n)$  avec  $L_{-k}^2(\mathbb{R}^n)$ . Sur une variété fermée  $X$ , il est clair en utilisant une partition de l'unité que la même chose se produit, c'est-à-dire que le produit scalaire  $L^2$  se prolonge en un couplage non-dégénéré

$$\begin{aligned} L_k^2(X) \times L_{-k}^2(X) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle_{L^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

induisant une relation de dualité entre  $L_k^2(X)$  et  $L_{-k}^2(X)$ . Autrement dit, ce couplage induit un isomorphisme anti-linéaire

$$\begin{aligned} L_{-k}^2(X) &\rightarrow (L_k^2(X))^* \\ v &\mapsto \langle \cdot, v \rangle_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Maintenant, comme sur  $\mathbb{R}^n$ , un opérateur  $A \in \Psi^m(X)$  possède un adjoint formel  $A^* \in \Psi^m(X)$  tel que

$$\langle Au, v \rangle_{L^2} = \langle u, A^*v \rangle_{L^2}. \quad (3.17)$$

Cette définition dépend bien sûr du produit scalaire  $L^2$  qu'on choisit. D'autre part, l'opérateur  $A$  peut être vu comme une application linéaire continue

$$A : L_{k+m}^2(X) \rightarrow L_k^2(X),$$

et de ce point de vue possède aussi un adjoint  $A_k^* : (L_k^2(X))^* \rightarrow (L_{k+m}^2(X))^*$  au sens de la Définition 3.26. Ces deux notions d'adjoint sont en fait reliées. En effet, comme l'identité (3.17) se prolonge par densité en une identité

$$\langle Au, v \rangle_{L^2} = \langle u, A^*v \rangle_{L^2} \quad \forall u \in L_{k+m}^2(X), \forall v \in L_{-k}^2(X), \quad (3.18)$$

on voit que sous l'isomorphisme (3.16), l'adjoint formel  $A \in \Psi^{-m}(X)$ , vu comme un opérateur  $A^* : L_{-k}^2(X) \rightarrow L_{-k-m}^2(X)$ , est identifié avec l'adjoint  $A_k^*$ , puisque

$$A_k^*(\langle \cdot, u \rangle_{L^2}) = \langle A \cdot, u \rangle_{L^2} = \langle \cdot, A^*u \rangle_{L^2} \quad \forall u \in L_{-k}^2(X).$$

Supposons maintenant que  $A \in \Psi^m(X)$  soit un opérateur elliptique. Dans ce cas, l'adjoint formel est aussi elliptique, puisque  $\sigma_m(A^*) = \overline{\sigma_m(A)}$ . Son noyau est donc de dimension fini avec

$$\ker A^* \subset \mathcal{C}^\infty(X) \subset L^2(X)$$

par régularité elliptique. L'identification entre  $A_k^*$  et  $A^*$  donne aussi une décomposition orthogonale

$$L_k^2(X) = A(L_{k+m}^2(X)) \oplus \ker A^*$$

via la relation (3.18), ce qui établit le résultat suivant.

**Proposition 3.30.** *Si  $A \in \Psi^m(X)$  est elliptique, alors l'indice de l'opérateur de Fredholm*

$$A : L_{k+m}^2(X) \rightarrow L_k^2(X)$$

*ne dépend pas de  $k$  et est donné par*

$$\text{ind } A = \dim \ker A - \dim \ker A^*$$

*avec  $A^* \in \Psi^m(X)$  l'adjoint formel de  $A$  par rapport au produit scalaire  $L^2$ .*

**Corollaire 3.31** (Alternative de Fredholm). *Si  $A \in \Psi^m(X)$  est un opérateur elliptique formellement auto-adjoint, c'est-à-dire que  $A^* = A$ , alors*

$$\text{ind } A = 0.$$

*En particulier, l'opérateur  $A$  induit un opérateur bijectif  $A : L_{m+k}^2(X) \rightarrow L_k^2(X)$  si et seulement son noyau est trivial.*

**Exemple 3.32.** Si pour  $k \geq 0$ , un opérateur  $A \in \Psi^{\frac{k}{2}}(X)$  est elliptique, alors l'opérateur  $D := A^*A + 1 \in \Psi^k(X)$  est aussi elliptique, puisque son symbole principal est donné par

$$\sigma_k(D) = \sigma_{\frac{k}{2}}(A) \overline{(\sigma_{\frac{k}{2}}(A))} + 1 = |\sigma_{\frac{k}{2}}(A)|^2 + 1 > 0.$$

Comme  $(A^*)^* = A$ , c'est de plus clairement un opérateur formellement auto-adjoint. Si  $u \in \mathcal{C}^\infty(X)$  est dans le noyau de  $D$ , alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u, Du \rangle_{L^2} = \langle u, (A^*A + 1)u \rangle_L \\ &= \langle Au, Au \rangle_{L^2} + \langle u, u \rangle_{L^2} \\ &= \|Au\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \geq \|u\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

ce qui montre  $u = 0$ , et donc que le noyau de  $D$  est trivial. Par le Corollaire 3.31, l'opérateur  $D$  est donc inversible.

En particulier, l'opérateur  $D$  induit un isomorphisme

$$D : L_k^2(X) \rightarrow L^2(X),$$

si bien que la topologie de  $L_k^2(X)$  est induite par la norme associée au produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_D := \langle Du, Dv \rangle_{L^2}, \quad u, v \in L_k^2(X). \quad (3.19)$$

De même, L'inverse  $D^{-1}$  de  $D : L^2(X) \rightarrow L_{-k}^2(X)$  peut être utilisé pour définir un produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{D^{-1}} = \langle D^{-1}u, D^{-1}v \rangle_{L^2}, \quad u, v \in L_{-k}^2(X), \quad (3.20)$$

dont la norme induit la topologie de  $L_{-k}^2(X)$ . Cela confirme que la topologie de  $L_k^2(X)$  induite par la norme (3.11) ne dépend pas du choix de recouvrement fini et de partition de l'unité subordonné, car comme  $D$  et  $D^{-1}$  sont des isomorphismes, on peut utiliser de manière équivalente les normes des produits scalaires (3.19) et (3.20) pour définir la topologie de  $L_k^2(X)$  pour  $k > 0$  et  $k < 0$ .

**Exercice 3.33.** À l'aide d'une partition de l'unité et de la Proposition 1.26, montrer que les fonctions lisses sont denses dans  $L^2(X)$ . Utiliser alors les isomorphismes donnés par les opérateurs  $D$  et  $D^{-1}$  ci-haut pour montrer que les fonctions lisses sont aussi denses dans  $L_k^2(X)$  pour  $k \neq 0$ .

Lorsqu'un opérateur elliptique est inversible, on peut donner la caractérisation suivante de son inverse.

**Corollaire 3.34.** Si  $A \in \Psi^m(X)$  est un opérateur elliptique tel que  $A : L_{m+k}^2(X) \rightarrow L_k^2(X)$  est inversible pour un certain  $k$ , alors son inverse est un élément de  $\Psi^{-m}(X)$ .

*Démonstration.* Soit  $B \in \Psi^{-m}(X)$  une paramétrice pour  $A$ , de sorte que  $BA = \text{Id} + K_1$  et  $AB = \text{Id} + K_2$  avec  $K_1, K_2 \in \Psi^{-\infty}(X)$ . Par la régularité elliptique,  $A$  est aussi inversible en tant qu'application  $A : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} BA = \text{Id} + K_1 &\implies B = A^{-1} + K_1 A^{-1} \implies A^{-1} = B - K_1 A^{-1}, \\ AB = \text{Id} + K_2 &\implies B = A^{-1} + A^{-1} K_2 \implies A^{-1} = B - A^{-1} K_2. \end{aligned}$$

On a donc que

$$\begin{aligned} A^{-1} &= B - K_1 A^{-1} = B - K_1(B - A^{-1} K_2) \\ &= B - K_1 B + K_1 A^{-1} K_2. \end{aligned}$$

Comme  $K_1$  et  $K_2$  sont des opérateurs régularisants, l'opérateur  $K_1 A^{-1} K_2$  induit une application

$$K_1 A^{-1} K_2 : \mathcal{C}^{-\infty}(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X).$$

À l'aide d'un argument à partir de partitions de l'unité, on déduit du numéro 1 des exercices supplémentaires du Chapitre 2 que  $K_1 A^{-1} K_2 \in \Psi^{-\infty}(X)$ . On a aussi que  $K_1 B \in \Psi^{-\infty}(X)$ , donc  $A^{-1} \in \Psi^{-m}(X)$  avec  $A^{-1} - B \in \Psi^{-\infty}(X)$ .  $\square$

### 3.7 Opérateurs pseudodifférentiels agissant sur les sections d'un fibré vectoriel

En géométrie différentielle, plusieurs exemples importants d'opérateurs différentiels sont obtenus en dérivant des sections d'un fibré vectoriel plutôt que des fonctions. Tous les résultats que nous avons vus jusqu'à présent sur une variété fermée se généralisent bien à ce cadre. En effet, comme les fibrés vectoriels (de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) sont localement triviaux, quitte à ne considérer que des cartes locales  $F_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur lesquelles les fibrés vectoriels que l'on souhaite considérer sont triviaux, on peut définir les opérateurs pseudodifférentiels et les espaces de Sobolev essentiellement comme dans le cas du fibré en droites trivial.

En effet, pour le fibré trivial  $E_q := \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$  de rang  $q$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir l'espace de Sobolev d'ordre  $k$  des sections de  $E_q$  canoniquement par

$$L_k^2(\mathbb{R}^n; E_q) = L_k^2(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^q,$$

alors que l'espace des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre  $m$  agissant des sections de  $E_p$  vers les sections de  $E_q$  est défini canoniquement par

$$\Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n; E_p, E_q) = \Psi_\infty^m(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q)$$

avec loi de composition spécifiée par

$$(A \otimes_{\mathbb{C}} M) \circ (B \otimes_{\mathbb{C}} N) = (AB) \otimes (M \circ N) \in \Psi_{\infty}^{m+m'}(\mathbb{R}^n; E_p, E_r)$$

pour  $A \in \Psi_{\infty}^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $B \in \Psi_{\infty}^{m'}(\mathbb{R}^n)$ ,  $M \in \text{Hom}(\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^r)$  et  $N \in \text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q)$ . Si  $E \rightarrow X$  et  $F \rightarrow X$  sont des fibrés vectoriels sur une variété fermée  $X$ , on peut donc utiliser ces modèles locaux pour définir l'espace de Sobolev  $L_k^2(X; E)$  d'ordre  $k$  associé aux sections de  $E$ , ainsi que l'espace  $\Psi^m(X; E, F)$  des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre  $m$  agissant des sections de  $E$  vers les sections de  $F$ . Si  $h$  est une métrique hermitienne pour le fibré  $E$  et  $g$  est une métrique riemannienne sur  $X$ , notons qu'on peut définir un produit scalaire  $L^2$  par

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_X h(u, v) dg, \quad \text{pour } u, v \in L^2(X; E).$$

Lorsque  $E = F$ , il sera aussi commode d'utiliser la notation  $\Psi^m(X; E)$  pour dénoter les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre  $m$  agissant des sections de  $E$  vers les sections de  $E$ . Dans ce cadre, le Théorème 3.12 se généralise notamment de la manière suivante.

**Théorème 3.35.** *Un opérateur  $A \in \Psi^m(X; E, F)$  induit une application linéaire continue*

$$A : L_{m+k}^2(X; E) \rightarrow L_k^2(X; F)$$

pour tout  $k \in \mathbb{R}$ .

Comme pour le passage de  $\Psi_{\infty}^m(\mathbb{R}^n)$  à  $\Psi^m(X)$ , le passage de  $\Psi^m(X)$  à  $\Psi^m(X; E, F)$  requiert des ajustements en ce qui a trait à la définition du symbole principal. Si

$$\pi : T^*X \rightarrow X$$

est la projection canonique du fibré cotangent, alors le symbole principal d'un opérateur  $A \in \Psi^m(X; E, F)$  ne sera plus une fonction sur  $T^*X$ , mais une section du fibré  $\pi^*(\text{Hom}(E, F)) = \text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)$  au-dessus de  $T^*X$ . À l'aide des modèles locaux et de partitions de l'unité, on peut définir l'espace

$$\mathcal{S}^m(T^*X; \pi^* \text{Hom}(E, F))$$

des symboles d'ordre  $m$  à valeurs dans  $\pi^* \text{Hom}(E, F)$ , ainsi que de la classe d'équivalence

$$\mathcal{S}^{m-[1]}(T^*X; \pi^* \text{Hom}(E, F)) = \mathcal{S}^m(T^*X; \pi^* \text{Hom}(E, F)) / \mathcal{S}^{m-1}(T^*X; \pi^* \text{Hom}(E, F)).$$

On peut montrer comme dans le cas des fibrés en droites triviaux qu'il existe un symbole principal

$$\sigma_m : \Psi^m(X; E, F) \rightarrow \mathcal{S}^{m-[1]}(T^*X; \pi^* \text{Hom}(E, F))$$

induisant une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Psi^{m-1}(X; E, F) \longrightarrow \Psi^m(X; E, F) \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{S}^{m-[1]}(T^*X; \pi^* \text{Hom}(E, F)) \longrightarrow 0.$$

Cette notion de symbole principal est compatible avec la composition des opérateurs pseudodifférentiels au sens où

$$\sigma_{m+m'}(A \circ B) = \sigma_m(A) \circ \sigma_{m'}(B) \in \mathcal{S}^{m+m'-[1]}(T^*X; \pi^* \text{Hom}(E, H))$$

pour  $A \in \Psi^m(X; F, H)$  et  $B \in \Psi^{m'}(X; E, F)$ . Lorsque  $E = F$  de sorte que le commutateur  $[A, B]$  a un sens, remarquons toutefois qu'on n'a pas nécessairement que  $[A, B] \in \Psi^{m-1}(X; E)$  lorsque  $E$  n'est pas un fibré en droites, puisque  $\sigma_m(A)$  ne commute pas nécessairement avec  $\sigma_{m'}(B)$ .

**Définition 3.36.** Un opérateur  $A \in \Psi^m(X; E, F)$  est **elliptique** s'il existe une classe de symbole  $[b] \in \mathcal{S}^{-m-[1]}(T^*X; \text{Hom}(F, E))$  telle que

$$[b]\sigma_m(A) = [\text{Id}_E] \in \mathcal{S}^{0-[1]}(T^*X; \pi^* \text{End}(E)) \quad \text{et} \quad \sigma_m(A)[b] = [\text{Id}_F] \in \mathcal{S}^{0-[1]}(T^*X; \pi^* \text{End}(E))$$

avec  $\text{Id}_E$  et  $\text{Id}_F$  les sections «identité» pour  $\pi^* \text{End}(E)$  et  $\pi^* \text{End}(F)$ .

En utilisant cette définition, tous les résultats obtenus jusqu'à présent pour les opérateurs elliptiques de  $\Psi^m(X)$  se généralisent aux opérateurs elliptiques de  $\Psi^m(X; E, F)$  d'une manière naturelle. On laisse les détails au lecteur. En pratique, pour calculer le symbole principal d'un opérateur différentiel  $A \in \text{Diff}^m(X; E, F)$  d'ordre  $m$ , on peut utiliser la formule suivante :

$$\sigma_m(df) = \lim_{h \rightarrow 0} h^m e^{-i\frac{f}{h}} \circ A \circ e^{i\frac{f}{h}}, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(X) \quad (3.21)$$

où  $df \in \mathcal{C}^\infty(X; T^*X)$  est la différentielle de  $X$ . On peut vérifier en coordonnées locales que cela correspond bien au symbole principal.

**Exercice 3.37.** Vérifier en utilisant la formule (3.21) que le symbole principal d'un opérateur différentiel  $A \in \text{Diff}^m(X; E, F)$  est représenté par un symbole polynomial homogène d'ordre  $m$  au sens où

$$\sigma_m(A)(\lambda\xi) = \lambda^m \sigma_m(A)(\xi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 3.38.** Si  $E \rightarrow X$  est un fibré vectoriel et  $\nabla^E : \mathcal{C}^\infty(X; E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; T^*X \otimes E)$  est une dérivée covariante induite par un choix de connexion, alors par la règle de Leibniz, le symbole principal de  $\nabla^E$ , vu comme un opérateur différentiel d'ordre 1, est donné par

$$\sigma_1(\nabla^E)(df)v = \lim_{h \rightarrow 0} h e^{-i\frac{f}{h}} \circ \nabla^E \circ e^{i\frac{f}{h}} v = \lim_{h \rightarrow 0} idf \otimes v,$$

c'est-à-dire que pour  $x \in X$ ,

$$\sigma_1(\nabla^E)(\xi)v = i\xi \otimes v \quad \xi \in T_x^*X, \quad v \in E_x,$$

où  $T_x^*X$  et  $E_x$  sont les fibres de  $T^*X$  et  $E$  au-dessus de  $x$ . Autrement dit,

$$\sigma_1(\nabla^E) \in \mathcal{C}^\infty(T^*X, \pi^* \text{Hom}(E, T^*X \otimes E))$$

est la section de  $\pi^* \text{Hom}(E, T^*X \otimes E)$  qui à  $\xi \in T^*X$  associe l'homomorphisme donné par le produit tensoriel par  $i\xi$ . En particulier, le symbole principal est le même pour toutes les dérivées covariantes de  $E$ , en accord avec le fait que celles-ci diffèrent par des opérateurs d'ordre 0, à savoir des sections de  $\text{End}(E)$ . Si  $\dim X > 1$ , on voit aussi que  $\nabla^E$  n'est pas elliptique, puisque que le symbole principal ne donne pas un homomorphisme surjectif pour tout  $\xi \in T^*X$ .



**Exemple 3.39.** Si maintenant  $g$  est une métrique riemannienne sur  $X$ , on peut utiliser sa connexion de Levi-Civita pour avoir aussi une dérivée covariante

$$\nabla^E : \mathcal{C}^\infty(X; T^*X \otimes E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; T^*X \otimes T^*X \otimes E),$$

de sorte qu'en appliquant d'abord la dérivée covariante de l'exemple précédent, on a un opérateur différentiel d'ordre 2

$$(\nabla^E)^2 : \mathcal{C}^\infty(X; E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; T^*X \otimes T^*X \otimes E).$$

Or, la métrique riemannienne  $g$  induit par dualité une métrique pour le fibré cotangent, et donc une trace

$$\begin{aligned} \text{Tr}_g : T^*X \otimes T^*X \otimes E &\rightarrow E \\ \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes e &\rightarrow g(\xi_1, \xi_2)e. \end{aligned}$$

Le laplacien associé à la métrique riemannienne  $g$  et au choix de connexion sur  $E$  est l'opérateur différentiel d'ordre 2

$$\begin{aligned} \Delta_g^E : \mathcal{C}^\infty(X; E) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; E) \\ e &\mapsto -\text{Tr}_g \circ (\nabla^E)^2 e. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En utilisant le calcul de l'exemple précédent, on voit que son symbole principal est donné par

$$\sigma_2(\Delta_g^E)(\xi)e = -\sigma_0(\text{Tr}_g)(\xi)\sigma_1(\nabla^E)(\xi)\sigma_1(\nabla^E)(\xi)e = -\text{Tr}_g(i\xi \otimes i\xi \otimes e) = g(\xi, \xi)e =: |\xi|_g^2 e$$

pour  $\xi \in T_x^*X$  et  $e \in E_x$  dans les fibres au-dessus d'un point  $x \in X$ . En particulier, si  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*X)$  est une fonction égale à 1 dans un voisinage de la section nulle, alors  $b = (1 - \rho)|\xi|_g^{-2} \in \mathcal{S}^{-2}(T^*X; \pi^* \text{Hom}(E, E))$  est un inverse de  $\sigma_2(\Delta_g^E)$ , ce qui montre que  $\Delta_g^E$  est elliptique. Clairement, le symbole principal ne dépend pas du choix de connexion  $\nabla^E$ , mais il dépend du choix de la métrique riemannienne  $g$ .

**Exemple 3.40.** La différentielle extérieure

$$d : \Omega^q(X) \rightarrow \Omega^{q+1}(X)$$

est un opérateur différentiel d'ordre 1, où  $\Omega^q(X) = \mathcal{C}^\infty(X; \Lambda^q(T^*X))$  dénote l'espace des formes différentielles lisses de degré  $q$ . En utilisant la règle de Leibniz, on voit que son symbole principal est donné par

$$\sigma_1(d)(df)\omega = \lim_{h \rightarrow 0} e^{-i\frac{f}{h}} \circ d \circ e^{i\frac{f}{h}} \omega = idf \wedge \omega,$$

c'est-à-dire que  $\sigma_1(d)(\xi) = i\xi \wedge$  correspond au produit extérieur par  $i\xi \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*X$ . En particulier, sauf pour le cas où  $\dim X = q + 1 = 1$ , la différentielle extérieure n'est pas elliptique, le produit extérieur par  $\xi$  n'induisant pas une bijection pour tout  $\xi \in T^*X$ .

**Exercice 3.41.** Soit  $\Sigma$  une surface de Riemann compacte. Calculer le symbole principal de l'opérateur

$$\bar{\partial} : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma)$$

défini par la structure complexe et montrer que c'est un opérateur elliptique d'ordre 1.

### 3.8 Théorie de Hodge

Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne fermée et orientée de dimension  $n$  et soit

$$d : \Omega^q(X) \rightarrow \Omega^{q+1}(X) \quad (3.23)$$

la différentielle extérieure. L'une des propriétés fondamentales de la différentielle extérieure est que  $d \circ d = 0$ , c'est-à-dire qu'elle induit un complexe

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^q(X) \xrightarrow{d} \Omega^{q+1}(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(X) \longrightarrow 0. \quad (3.24)$$

On appelle **cohomologie de de Rham** la cohomologie associée à ce complexe et on dénote par

$$H^q(X) := \{\omega \in \Omega^q(X) \mid d\omega = 0\} / \{d\eta \mid \eta \in \Omega^{q-1}(X)\} \quad (3.25)$$

son groupe de cohomologie de degré  $q$ .

La théorie de Hodge permet de donner une description naturelle et géométrique de ces groupes de cohomologie en faisant appel à la métrique riemannienne  $g$ . Notons d'abord que celle-ci induit un produit scalaire  $L^2$  sur les fonctions comme indiqué en (3.10). Elle induit aussi une métrique Euclidienne  $(\cdot, \cdot)_g$  pour le fibré  $\Lambda^q(T^*X) \rightarrow X$ , et par suite un produit scalaire  $L^2$  pour les formes différentielles de degré  $q$

$$\langle \omega, \eta \rangle_{L^2} = \int_X (\omega, \eta)_g dg, \quad \omega, \eta \in \Omega^q(X). \quad (3.26)$$

Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base orthonormale orientée de  $T_x^*X$  par rapport au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_g$ , alors

$$\{e^H = e_{h_1} \wedge \dots \wedge e_{h_q} \mid 1 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_q \leq n\}$$

est une base orthonormale de  $\Lambda^q(T_x^*X)$  par rapport au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_g$ . Soit

$$d^* : \Omega^{q+1}(X) \rightarrow \Omega^q(X) \quad (3.27)$$

l'adjoint formel de la différentielle extérieure (3.23) par rapport au produit scalaire  $L^2$ . C'est un opérateur différentiel d'ordre 1. Une manière efficace de décrire cet adjoint formel est d'utiliser l'étoile de Hodge, qui est l'unique opérateur d'ordre zéro

$$* : \Omega^q(X) \rightarrow \Omega^{n-q}(X) \quad (3.28)$$

tel que

$$\langle \omega, \eta \rangle_{L^2} = \int_X \omega \wedge *\eta. \quad (3.29)$$

L'existence et l'unicité de l'étoile de Hodge viennent du fait que le produit extérieur induit un couplage non-dégénéré

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^q(T_x^*X) \times \Lambda^{n-q}(T_x^*X) &\rightarrow \Lambda^n(T_x^*X) \cong \mathbb{R} \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \wedge \eta. \end{aligned}$$

En termes d'une base orthonormale orientée  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_x^*X$ , il est facile de voir que l'étoile de Hodge est donnée par

$$*(e_1 \wedge \dots \wedge e_q) = e_{q+1} \wedge \dots \wedge e_n. \quad (3.30)$$

En particulier, si  $\omega$  est une forme différentielle de degré  $q$ , on a que

$$**\omega = (-1)^{q(n-q)}\omega. \quad (3.31)$$

**Lemme 3.42.** *L'adjoint formel  $d^*$  de la différentielle extérieure est donné par*

$$d^*\eta = (-1)^{n(q-1)+1} * d * \eta \quad \text{pour } \eta \in \Omega^q(X).$$

*Démonstration.* En utilisant le théorème de Stokes, on calcule que pour  $\omega \in \Omega^{q-1}(X)$  et  $\eta \in \Omega^q(X)$ ,

$$\begin{aligned} \langle d\omega, \eta \rangle_{L^2} &= \int_X (d\omega) \wedge * \eta = \int_X d(\omega \wedge * \eta) + (-1)^q \int_X \omega \wedge d * \eta \\ &= (-1)^q \int_X \omega \wedge d * \eta = (-1)^q \int_X \omega \wedge (-1)^{(n-q+1)(n-(n-q+1))+1} **d * \eta \\ &= (-1)^{n(q-1)+1} \int_X \omega \wedge *( * d * \eta) = \langle \omega, (-1)^{n(q-1)+1} * d * \eta \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

□

La formule du Lemme 3.42 nous permet de déterminer le symbole principal de  $d^*$  à partir de celui de  $d$  comme suit pour  $\eta \in \Lambda^q(T_x^*X)$  et  $\xi \in T_x^*X$ ,

$$\sigma_1(d^*)(\xi)\eta = (-1)^{n(q-1)+1} \sigma_1(*d*)\eta = (-1)^{n(q-1)+1} *(i\xi \wedge (*\eta)).$$

En considérant le cas  $\eta = e_1 \wedge \dots \wedge e_q$  avec  $\xi = e_1$  et  $\xi = e_{q+1}$ , on vérifie alors que

$$\sigma_1(d^*)(\xi)\eta = -i\nu_{\xi^\#}\eta, \quad (3.32)$$

où  $\xi^\# \in T_xX$  est le vecteur tel que  $\xi = g(\xi^\#, \cdot)$ .

**Définition 3.43.** **L'opérateur de Hodge-deRham** associé à la métrique  $g$  est l'opérateur différentiel d'ordre 1

$$d + d^* : \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(X) \rightarrow \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(X).$$

Le **laplacien de Hodge** est le carré de cet opérateur,  $\Delta = (d + d^*)^2$ . Puisque  $d^2 = (d^*)^2 = 0$ , on a aussi que

$$\Delta = d^*d + dd^*.$$

Clairement, l'opérateur de Hodge-deRham et le laplacien de Hodge sont des opérateurs formellement auto-adjoints par rapport au produit scalaire  $L^2$  sur les formes différentielles. Ce sont aussi des opérateurs elliptiques comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 3.44.** *L'opérateur de Hodge-deRham est un opérateur elliptique d'ordre 1, donc en particulier le laplacien de Hodge est un opérateur elliptique d'ordre 2.*

*Démonstration.* Par l'Exemple 3.40 et l'équation (3.32), le symbole principal de l'opérateur de Hodge-deRham est donné par

$$\sigma_1(d + d^*)(\xi)\eta = i(\xi \wedge \eta - \iota_{\xi^\#}\eta).$$

Comme  $\xi(\xi^\#) = g(\xi^\#, \xi^\#) =: |\xi|_g^2$  et que  $\xi \wedge \xi = \iota_{\xi^\#}\iota_{\xi^\#} = 0$ , on voit donc que le symbole principal du laplacien de Hodge est donné par

$$\sigma_2(\Delta)(\xi) = (\sigma_1(d + d^*)(\xi))^2 = \iota_{\xi^\#} \circ (\xi \wedge) + (\xi \wedge) \circ \iota_{\xi^\#} = |\xi|_g^2,$$

c'est-à-dire que  $\sigma_2(\Delta)(\xi)$  correspond à la multiplication par  $|\xi|_g^2$ . Comme dans l'Exemple 3.39, ce symbole principal est donc inversible et  $\Delta$  est elliptique. Si  $b$  est un inverse de  $\sigma_2(\Delta)$ , alors  $b\sigma_1(d + d^*)$  sera un inverse de  $\sigma_1(d + d^*)$ , ce qui montre que  $d + d^*$  est aussi un opérateur elliptique.  $\square$

En particulier, les noyaux de  $\Delta$  et  $d + d^*$  sont de dimensions finies et constitués de formes différentielles lisses.

**Lemme 3.45.** *On a que*

$$\ker \Delta = \ker d \cap \ker d^* = \ker(d + d^*) \subset \Omega^*(X).$$

*Démonstration.* Clairement, on a que

$$\ker d \cap \ker d^* \subset \ker(d + d^*) \subset \ker \Delta.$$

Inversement, on a que

$$\begin{aligned} \omega \in \ker \Delta &\implies \langle \Delta \omega, \omega \rangle_{L^2} = 0 \\ &\implies \langle d^* d \omega, \omega \rangle_{L^2} + \langle d d^* \omega, \omega \rangle_{L^2} = 0 \\ &\implies \langle d \omega, d \omega \rangle_{L^2} + \langle d^* \omega, d^* \omega \rangle_{L^2} = 0 \\ &\implies \|d \omega\|_{L^2}^2 + \|d^* \omega\|_{L^2}^2 = 0 \\ &\implies \omega \in \ker d \cap \ker d^* \subset \ker(d + d^*). \end{aligned}$$

$\square$

Les éléments du noyaux du laplacien de Hodge sont appelés **les formes harmoniques**. Comme le laplacien de Hodge préserve le degré d'une forme, on a une décomposition

$$\ker \Delta = \bigoplus_{q=0}^n \ker \Delta^q$$

avec  $\Delta^q$  dénotant le laplacien de Hodge agissant sur les formes différentielles de degré  $q$ . Soit  $\eta_1, \dots, \eta_\ell$  une base orthonormale de  $\ker \Delta$  par rapport au produit scalaire  $L^2$ . La projection orthogonale sur les formes harmoniques est alors donnée par

$$\Pi\omega = \sum_{j=1}^{\ell} \langle \omega, \eta_j \rangle_{L^2} \eta_j.$$

Comme  $\eta_j$  est une forme lisse, on a automatiquement que  $\Pi \in \Psi^{-\infty}(X; \Lambda^*(T^*X))$ .

**Proposition 3.46.** *Il existe un unique opérateur  $G \in \Psi^{-1}(X; \Lambda^*(T^*X))$  tel que*

$$G(d + d^*) = (d + d^*)G = \text{Id} - \Pi.$$

*Démonstration.* Comme l'opérateur de Hodge-deRham est formellement auto-adjoint, l'opérateur

$$(\text{Id} - \Pi)(d + d^*)(\text{Id} - \Pi) : (\text{Id} - \Pi)L_1^2(X; \Lambda^*(T^*X)) \rightarrow (\text{Id} - \Pi)L^2(X; \Lambda^*(T^*X)),$$

est inversible. Ainsi, l'opérateur  $G$  est forcément donné par l'inverse de cet opérateur lorsqu'agissant sur  $(\text{Id} - \Pi)L^2(X; \Lambda^*(T^*X))$  et par l'action triviale lorsqu'agissant sur  $\ker(d + d^*)$ . Reste à montrer que  $G$  est bien un opérateur pseudodifférentiel. Pour ce faire, soit  $Q \in \Psi^{-1}(X; \Lambda^*(T^*X))$  une paramétrice pour  $(d + d^*)$  :

$$Q(d + d^*) = \text{Id} + R_1 \quad \text{et} \quad (d + d^*)Q = \text{Id} + R_2$$

avec  $R_1, R_2 \in \Psi^{-\infty}(X; \Lambda^*(T^*X))$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} Q(\text{Id} - \Pi) &= Q(d + d^*)G = (\text{Id} + R_1)G \implies G = Q(\text{Id} - \Pi) - R_1G, \\ (\text{Id} - \Pi)Q &= G(d + d^*)Q = G(\text{Id} + R_2) \implies G = (\text{Id} - \Pi)Q - GR_2. \end{aligned}$$

En substituant la deuxième équation dans la première, on obtient donc

$$\begin{aligned} G &= Q(\text{Id} - \Pi) - R_1G = Q(\text{Id} - \Pi) - R_1((\text{Id} - \Pi)Q - GR_2) \\ &= Q(\text{Id} - \Pi) - R_1(\text{Id} - \Pi)Q + R_1GR_2. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes à droite sont dans  $\Psi^{-1}(X; \Lambda^*(T^*X))$  et  $\Psi^{-\infty}(X; \Lambda^*(T^*X))$ . Pour ce qui est du dernier terme, il est tel que

$$R_1GR_2 : \mathcal{C}^{-\infty}(X; \Lambda^*(T^*X)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; \Lambda^*(T^*X)),$$

c'est-à-dire qu'il transforme toute distribution à valeur dans  $\Lambda^*(T^*X)$  (un courant) en une forme différentielle lisse. Comme dans la preuve du Corollaire 3.34, on voit par l'exercice supplémentaire 1 du Chapitre 2 que  $R_1GR_2 \in \Psi^{-\infty}(X; \Lambda^*(T^*X))$ .  $\square$

**Corollaire 3.47.** *L'opérateur  $G_\Delta := G^2 \in \Psi^{-2}(X; \Lambda^*(T^*X))$  est tel que*

$$G_\Delta \Delta = \Delta G_\Delta = \text{Id} - \Pi.$$

**Remarque 3.48.** Comme  $d + d^*$  commute avec  $G$ , il commute aussi avec  $G_\Delta = G^2$ .

**Théorème 3.49** (Décomposition de Hodge). *On a la décomposition orthogonale*

$$\begin{aligned} L^2(X; \Lambda^*(T^*X)) &= \ker \Delta \oplus d(L^2_1(X; \Lambda^*(T^*X))) \oplus d^*L^2_1(X; \Lambda^*(T^*X)) \\ &= \ker \Delta \oplus \overline{d\Omega^*(X)} \oplus \overline{d^*\Omega^*(X)} \end{aligned}$$

par rapport au produit scalaire  $L^2$ . Pour les formes différentielles lisses, cette décomposition induit la décomposition

$$\Omega^*(X) = \ker \Delta \oplus d\Omega^*(X) \oplus d^*\Omega^*(X).$$

*Démonstration.* Par la Proposition 3.46, on a la décomposition

$$L^2(X; \Lambda^*(T^*X)) = \ker \Delta \oplus (d + d^*)L^2_1(X; \Lambda^*(T^*X)).$$

Montrons que les images de  $d$  et  $d^*$  sont orthogonales. En effet, pour  $\omega \in \Omega^*(X)$  et  $\eta \in \Omega^*(X)$ , on a que

$$\langle d\omega, d^*\eta \rangle_{L^2} = \langle d^2\omega, \eta \rangle_{L^2} = 0. \quad (3.33)$$

En utilisant le fait que le produit scalaire  $L^2$  induit un couplage non-dégénéré

$$\begin{aligned} L^2_{-1}(X; \Lambda^*(T^*X)) \times L^2_1(X; \Lambda^*(T^*X)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \eta) &\mapsto \langle \omega, \eta \rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

on voit par densité de  $\Omega^*(X)$  dans  $L^2_1(X; \Lambda^*(T^*X))$  que la relation (3.33) reste vraie pour  $\omega, \eta \in L^2_1(X; \Lambda^*(T^*X))$ . Pour établir que la décomposition se restreint de la manière indiquée aux formes différentielles lisses, il suffit de noter que si  $\omega \in \Omega^*(X)$ , alors

$$\omega = \text{Id } \omega = ((d + d^*)G + \Pi)\omega = \Pi\omega + dG\omega + d^*G\omega$$

avec  $G\omega \in \Omega^*(X)$  grâce à la Proposition 3.46. □

La décomposition de Hodge permet entre autres de donner la description suivante de la cohomologie de de Rham.

**Corollaire 3.50.** *Il existe un isomorphisme naturel*

$$\ker \Delta^q \cong H^q(X),$$

où  $\Delta^q$  est le laplacien de Hodge restreint aux formes de degré  $q$ . En particulier, les groupes de cohomologie de de Rham  $H^q(X)$  sont de dimensions finies.

*Démonstration.* Si  $\omega \in \ker \Delta^q$ , par le Lemme 3.45,  $d\omega = 0$ . En tant que forme fermée, la forme  $\omega$  représente donc une classe de cohomologie  $[\omega] \in H^q(X)$ . On a donc une application naturelle

$$\begin{aligned} j : \ker \Delta^q &\rightarrow H^q(X) \\ \omega &\mapsto [\omega]. \end{aligned}$$

Par l'orthogonalité de la décomposition de Hodge, cette application est injective. Elle est aussi surjective, puisque pour  $\omega \in \Omega^q(X)$  avec  $d\omega = 0$ , on a que

$$\langle \omega, d^*\eta \rangle_{L^2} = \langle d\omega, \eta \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall \eta \in \Omega^{q+1}(X),$$

donc la décomposition de Hodge donne

$$\omega = \mu + d\nu$$

$\mu \in \ker \Delta_q$  et  $\nu \in \Omega^{q-1}(X)$ , ce qui montre que  $[\omega] = j(\mu)$ . □

**Corollaire 3.51** (Dualité de Poincaré). *L'étoile de Hodge induit un isomorphisme*

$$* : \ker \Delta^q \rightarrow \ker \Delta^{n-q}, \tag{3.34}$$

*donc un isomorphisme  $H^q(X) \cong H^{n-q}(X)$ .*

*Démonstration.* Par les Lemmes 3.42 et 3.45, on a que

$$\omega \in \ker \Delta \iff \omega \in \ker d \cap \ker d^* \iff *\omega \in \ker d \cap \ker d^* \iff *\omega \in \ker \Delta,$$

ce qui montre que l'étoile de Hodge induit bien une application de la forme (3.34). Par la formule (3.31), cette application doit forcément être un isomorphisme. □

### 3.9 Spectre d'un opérateur elliptique

Soit  $P \in \Psi^m(X; E)$  un opérateur pseudodifférentiel d'ordre  $m \geq 0$  sur une variété fermée  $X$ .

**Définition 3.52.** Le **spectre** de  $P$  est l'ensemble

$$\text{Spec}(P) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (P - \lambda) : L_m^2(X; E) \rightarrow L^2(X; E) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Comme la proposition suivante l'indique, si  $m > 0$ , soit l'opérateur  $(P - \lambda)$  n'est jamais inversible, soit il l'est pour presque tout  $\lambda$ .

**Proposition 3.53.** *Si  $P \in \Psi^m(X; E)$  avec  $m > 0$  est un opérateur elliptique tel que  $\text{Spec}(P) \neq \mathbb{C}$ , alors  $\text{ind}(P) = 0$  et  $\text{Spec}(P)$  est un sous-ensemble discret de  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Si  $\text{ind}(P) \neq 0$ , alors par le Corollaire 3.24, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\text{ind}(P - \lambda) = \text{ind}(P) \neq 0,$$

ce qui implique que  $P - \lambda$  n'est pas inversible et donc que  $\text{Spec}(P) = \mathbb{C}$ . Ainsi, si on a que  $\text{Spec}(P) \neq \mathbb{C}$ , il faut nécessairement que  $\text{ind}(P) = 0$ . Dans ce cas, soit  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Spec}(P)$ , de sorte que  $P - \lambda_0$  est inversible. Par le Corollaire 3.34, son inverse  $Q_0$  est un élément de  $\Psi^{-m}(X; E)$ . En particulier, par le Corollaire 3.14, l'opérateur  $Q_0$  induit un opérateur compact

$$Q_0 : L^2(X; E) \rightarrow L^2(X; E). \tag{3.35}$$

Or comme

$$(P - \lambda) = (P - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0)) = (P - \lambda_0)(\text{Id}_E - (\lambda - \lambda_0)Q_0),$$

on voit que

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Spec}(P) &\implies \lambda \neq \lambda_0 \quad \text{et} \quad \ker(P - \lambda) \neq \{0\}, \\ &\implies \ker(\text{Id}_E - (\lambda - \lambda_0)Q_0) \neq \{0\}, \\ &\implies Q_0 - \frac{\text{Id}_E}{\lambda - \lambda_0} \quad \text{n'est pas inversible.} \end{aligned}$$

Or, comme l'opérateur (3.35) est compact, le seul point d'accumulation possible de  $\text{Spec}(Q_0)$  est  $0 \in \mathbb{C}$ , voir par exemple [Bre05, Théorème VI.8]. Ainsi, si  $\{\lambda_i\}$  est une suite d'éléments distincts de  $\text{Spec}(P)$ , cette suite est telle que soit la suite  $\{(\lambda_i - \lambda_0)^{-1}\}$  converge vers 0, soit elle ne converge pas. Dans les deux cas, la suite  $\{\lambda_i\}$  ne peut converger vers un point de  $\mathbb{C}$ , ce qui montre que  $\text{Spec}(P)$  n'a pas de point d'accumulation et est donc un sous-ensemble discret.  $\square$

Pour les opérateurs elliptiques formellement auto-adjoints, on peut donner une description plus détaillée du spectre.

**Théorème 3.54** (Décomposition spectrale). *Si  $P \in \Psi^m(X; E)$  avec  $m > 0$  est un opérateur elliptique formellement auto-adjoint, alors  $\text{Spec}(P)$  est un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}$  de cardinalité infinie. De plus, on a une décomposition orthogonale*

$$L^2(X; E) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(P)} E_\lambda \quad (3.36)$$

par rapport au produit scalaire  $L^2$ , où  $E_\lambda = \ker(P - \lambda)$  est l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda \in \text{Spec}(P)$ .

*Démonstration.* Comme  $P$  est formellement auto-adjoint, son indice est nul par le Corollaire 3.31. Par le Corollaire 3.24, on a donc que

$$\text{ind}(P - \lambda) = \text{ind}(P) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, si  $\lambda \in \text{Spec}(P)$ , alors il existe  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(X; E)$  tel que  $(P - \lambda)\psi = 0$  et  $\|\psi\|_{L^2} = 1$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) &= (\lambda - \bar{\lambda})\langle \psi, \psi \rangle_{L^2} \\ &= \langle \lambda \psi, \psi \rangle - \langle \psi, \lambda \psi \rangle_{L^2} = \langle P\psi, \psi \rangle_{L^2} - \langle \psi, P\psi \rangle_{L^2} \\ &= \langle P\psi, \psi \rangle_{L^2} - \langle P\psi, \psi \rangle_{L^2} = 0, \quad \text{car } P = P^*, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\lambda = \bar{\lambda}$ , c'est-à-dire que  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On en déduit que  $\text{Spec}(P) \subset \mathbb{R}$ . Par la Proposition 3.53, c'est en fait un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}$ . Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des éléments distincts de  $\text{Spec}(P)$ , alors pour  $\psi_1 \in E_{\lambda_1}$  et  $\psi_2 \in E_{\lambda_2}$ , on a que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2} = \langle P\psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2} - \langle \psi_1, P\psi_2 \rangle_{L^2} = \langle P\psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2} - \langle P\psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2} = 0,$$

ce qui montre que  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{L^2} = 0$ . La décomposition (3.36) est donc bien orthogonale. Pour voir qu'elle contient bien tous les éléments de  $L^2(X; E)$ , soit  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \text{Spec}(P)$ . Alors la décomposition (3.36) correspond à la décomposition spectrale de l'opérateur auto-adjoint compact  $Q_0 = (P - \lambda_0)^{-1}$ , qui est bien une décomposition de  $L^2(X; E)$ , voir par exemple [Bre05, Théorème VI.11].  $\square$



**Exemple 3.55.** Le spectre du laplacien de Hodge est positif, car

$$\Delta\omega = \lambda\omega, \|\omega\|_{L^2} = 1 \implies \lambda = \langle \omega, \Delta\omega \rangle_{L^2} = \langle (d + d^*)\omega, (d + d^*)\omega \rangle_{L^2} = \|(d + d^*)\omega\|_{L^2}^2 \geq 0.$$

### 3.10 Exercices supplémentaires

1. Pour  $d < n$ , soit  $\mathbb{R}^{n-d} \subset \mathbb{R}^n$  l'inclusion canonique. Montrer que l'application de restriction  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni u \rightarrow u|_{\mathbb{R}^{n-d}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-d})$  s'étend en une application linéaire continue

$$L_k^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{k-\frac{d}{2}}^2(\mathbb{R}^{n-d})$$

pourvu que  $k > \frac{d}{2}$ .

2. Montrer que pour  $k > \frac{n}{2}$ , l'application  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni (u, v) \mapsto uv \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  s'étend en une application bilinéaire continue  $L_k^2(\mathbb{R}^n) \times L_k^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_k^2(\mathbb{R}^n)$ .
3. Soit  $(X^n, g)$  une variété riemannienne fermée de dimension  $n$  et  $\Delta_g$  le laplacien associé. Pour un certain  $k > \frac{n}{2}$ , soit  $u \in L_k^2(X)$  une fonction telle que  $\Delta u = u^2 + f$  pour  $f \in C^\infty(X)$ . Montrer qu'en fait  $u \in C^\infty(X)$ .
4. Soit  $X$  une variété fermée de dimension  $n > 2$ . Montrer qu'un opérateur différentiel  $P \in \text{Diff}^1(X) \subset \Psi^1(X)$  d'ordre 1 agissant sur les fonctions n'est jamais elliptique.
5. Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne fermée et orientée. Montrer que les espaces propres des valeurs propres strictement positives du Laplacien de Hodge  $\Delta : \Omega^*(X) \rightarrow \Omega^*(X)$  sont tous de dimension paire. Si  $\dim X$  n'est pas un multiple de 4, montrer aussi que l'espace des formes harmoniques est aussi de dimension paire.
6. Soit  $X$  une variété fermée. Soit  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (g_t, \omega_t, J_t)$  une famille lisse de structures kählériennes, où  $g_t$  est la métrique kählérienne,  $J_t$  est la structure complexe compatible et  $\omega_t = g_t(J_t \cdot, \cdot)$  est la forme symplectique associée. Montrer que la dimension du groupe de cohomologie de Dolbeault  $H^{p,q}(X, J_t)$  ne dépend pas de  $t$ . Les faits suivants seront utiles :
  - (a)  $\sum_{p+q=k} \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X, J_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X; \mathbb{C})$ , où  $H^k(X; \mathbb{C})$  est le groupe de cohomologie singulière de  $X$  de degré  $k$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ ;
  - (b)  $H^{p,q}(X, J_t)$  est isomorphe au noyau de l'opérateur  $\Delta_t : \Omega^{p,q}(X, J_t) \rightarrow \Omega^{p,q}(X, J_t)$ , où  $\Delta_t$  est le laplacien de Hodge associée à la métrique  $g_t$  et  $\Omega^{p,q}(X, J_t)$  est l'espace des formes de type  $(p, q)$  de la variété complexe  $(X, J_t)$ . En particulier,

$$\Omega^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(X, J_t).$$

## 4 L'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est une équation parabolique. Pour la résoudre, on peut aussi en quelque sorte utiliser des opérateurs pseudodifférentiels. Ceux-ci devront toutefois avoir une définition adaptée au problème. Commençons par regarder ce qui se passe sur  $\mathbb{R}^n$ .

### 4.1 L'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$

Dénotons par

$$\Delta = \sum_{j=1}^n D_j^2 = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (4.1)$$

le laplacien sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans ce cadre, l'équation de la chaleur prend la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u, & u \text{ une fonction sur } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = u_0, & \text{(conditions initiales)}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Pour résoudre cette équation, prenons la transformée de Fourier dans le facteur  $\mathbb{R}^n$  de chaque côté de l'équation, ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -|\xi|^2 \hat{u}, & t \geq 0, \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0, & \text{(conditions initiales)}, \end{cases} \implies \hat{u} = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0 \text{ est la solution.}$$

En prenant l'inverse de la transformée de Fourier, on obtient

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0)(x).$$

Or, si

$$f * h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)dy$$

est le produit de convolution sur  $\mathbb{R}^n$ , il est bien connu que pour  $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * h)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i(z+y) \cdot \xi} f(z)h(y)dzdy \text{ en posant } z = x-y, \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz \cdot \xi} f(z)dz \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot \xi} h(y)dy \right) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(h)(\xi). \end{aligned}$$

Ainsi, par (1.25), on a que

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}) * u_0 = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} * u_0.$$

Autrement dit, on obtient que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} u_0(y)dy. \quad (4.3)$$

**Définition 4.1.** La fonction  $\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}$  sur  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n \times (0, \infty)$  est le **noyau de la chaleur** du laplacien  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour chaque  $t > 0$ , c'est le noyau de Schwartz d'un opérateur  $K_t \in \Psi_\infty^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$  ayant pour symbole à gauche, à droite ou de Weyl

$$\sigma_G(K_t) = \sigma_D(K_t) = \sigma_W(K_t) = e^{-t|\xi|^2}.$$

Pour cette raison, on utilise aussi la notation  $e^{-t\Delta}$  pour dénoter l'opérateur  $K_t$ .

Puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t|\xi|^2} = 1$ , en prenant la transformée de Fourier inverse au sens des distributions, on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} = \delta(x-y) = \delta_{\mathfrak{D}}.$$

En termes d'opérateurs, on a donc que

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t\Delta} = \text{Id},$$

ce qui est en accord avec les conditions initiales qu'une solution de l'équation de la chaleur doit satisfaire.

**Théorème 4.2.** Pour  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , l'équation de la chaleur (4.1) possède une unique solution

$$u(x, t) = e^{-t\Delta} u_0(x)$$

telle que  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $t > 0$  et

$$u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(\cdot, t) = u_0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^n).$$

De plus, sur  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ,  $u$  est une fonction lisse.

*Démonstration.* Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions. Alors pour  $t > 0$ , comme  $u_1 - u_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\Delta(u_1 - u_2) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , on voit par régularité elliptique, plus précisément par le Corollaire 2.38, que  $u_1 - u_2 \in L^2_2(\mathbb{R}^n)$ . Ainsi, toujours pour  $t > 0$ , on a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|u_1 - u_2\|_{L^2} &= 2 \langle u_1 - u_2, -\Delta(u_1 - u_2) \rangle_{L^2} \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^n} \| |\xi| (\hat{u}_1 - \hat{u}_2) \|_{L^2}^2 \leq 0, \quad \text{en utilisant la transformée de Fourier.} \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 = \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 = 0,$$

il faut donc par le théorème des accroissements finis que  $\|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 = 0$  pour tout  $t \in [0, \infty)$ , d'où  $u_1 = u_2$ . Les propriétés du noyau de la chaleur induisent les propriétés énoncées pour la solution. En particulier, comme  $\hat{u} = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0$  décroît rapidement à l'infini pour  $t > 0$ , on voit par le plongement de Sobolev que

$$u(\cdot, t) \in \bigcap_{k \in \mathbb{R}} L^2_k(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour } t > 0.$$

Comme  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u$  et que les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\Delta$  commutent, on a plus généralement que

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = (-\Delta)^k u \quad \forall k \in \mathbb{N}, t > 0,$$

donc que  $u$  est lisse en  $t$  pour  $t > 0$ . □

Lorsque  $t$  tend vers l'infini, le noyau de la chaleur décroît vers zéro, par exemple en tant que fonction bornée. On a en fait un développement asymptotique complet en termes de puissances de  $\sqrt{t}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sim \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} |x-y|^{2k} \left(\frac{1}{4t}\right)^k.$$

Lorsque  $t \searrow 0$ , a-t-on aussi un développement asymptotique en puissances de  $t$ ? La réponse dépend beaucoup de  $x$  et  $y$ . Si  $x = y$ , alors

$$\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}$$

tend vers l'infini lorsque  $t \searrow 0$ . Cependant, si  $x \neq y$ , alors  $\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}$  décroît rapidement vers zéro lorsque  $t \searrow 0$ . En choisissant un système de coordonnées mieux adapté au noyau de la chaleur, on peut réconcilier ces deux propriétés radicalement opposées. Plus précisément, au lieu d'utiliser les coordonnées  $x, y$  et  $t$ , on peut lorsque  $n = 1$  utiliser les coordonnées polaires

$$y, \quad r = \sqrt{|x-y|^2 + t}, \quad \theta = \arctan \frac{x-y}{\sqrt{t}}. \quad (4.4)$$

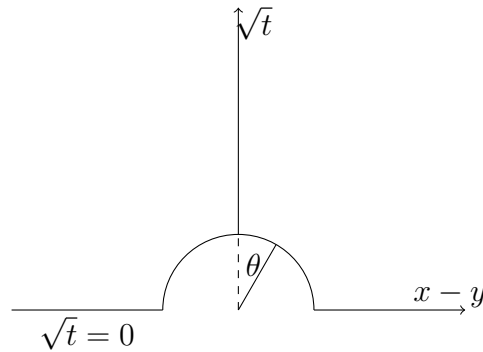


FIGURE 2 – les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$

Dans ces nouvelles coordonnées,

$$x - y = r \sin \theta \quad \text{et} \quad \sqrt{t} = r \cos \theta,$$

de sorte que

$$\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-\frac{(\tan \theta)}{4}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}(r \cos \theta)^1}.$$

Clairement, on a alors une décroissance rapide sur les faces  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , alors que sur la face  $r = 0$ , on a un développement polynomial

$$\frac{e^{-\frac{(\tan \theta)}{4}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}(r \cos \theta)^1} = \frac{e^{-\frac{(\tan \theta)}{4}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}(\cos \theta)} \frac{1}{r}.$$

Comme le coefficient  $\frac{e^{-\frac{(\tan \theta)}{4}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}(\cos \theta)}$  décroît rapidement lorsque  $\theta \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$ , les deux expansions sont naturellement compatibles.

Pour construire le noyau de la chaleur du laplacien sur une variété fermée, on a besoin d'une description intrinsèque de ce changement de coordonnées. Remarquons que l'espace  $[0, \infty)_r \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]_\theta$  représenté dans la Figure 2 est une variété à coins qui n'est pas difféomorphe à la variété à bord  $\mathbb{R} \times [0, \infty)_{\sqrt{t}}$ . On a toutefois une application naturelle

$$\begin{aligned} \beta : [0, \infty)_r \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]_\theta &\rightarrow \mathbb{R} \times [0, \infty)_{\sqrt{t}} \\ (r, \theta) &\mapsto (r \sin \theta, r \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

envoyant la face  $r = 0$  sur l'origine, mais sinon se restreignant à un difféomorphisme sur le complément de cette face. L'espace  $[0, \infty)_r \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]_\theta$  est **l'éclatement** de  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  en  $\{0\} \times \{0\}$  au sens de Melrose [Mel93] :

$$[\mathbb{R} \times [0, \infty); \{0\} \times \{0\}] := [0, \infty)_r \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]_\theta \quad (4.6)$$

avec **application de contraction** donnée par (4.5).

Plus généralement, si  $X$  est une variété à bord et  $Y \subset \partial X$  est une sous-variété de  $\partial X$ , on peut définir l'éclatement de  $X$  en  $Y$  comme étant l'ensemble

$$[X; Y] = (X \setminus Y) \sqcup S^+Y \quad (4.7)$$

où

$$S^+Y = (N_{int}Y \setminus Y)/\mathbb{R}_{>0}$$

avec  $N_{int}Y$  le sous-ensemble du fibré normal  $NY = TX|_Y/TY$  de  $Y$  engendré par les éléments de  $TX|_Y$  tangent au bord ou pointant vers l'intérieur de  $X$ . Ainsi,  $S^+Y$  est un fibré  $S^+Y \rightarrow Y$  au-dessus de  $Y$  dont les fibres sont des demi-sphères de dimensions  $q - 1$ , où  $q$  est la codimension de  $Y$  dans  $X$ . **L'application de contraction**

$$\beta : [X; Y] \rightarrow X$$

est alors donnée par l'identité sur  $X \setminus Y$  et par la projection naturelle  $S^+Y \rightarrow Y$  sur  $S^+Y$ .

Soit

$$c : N_{int}Y \rightarrow X \quad (4.8)$$

un choix de voisinage tubulaire de  $Y$  dans  $X$ . Au dessus de  $S^+Y$ , on a un fibré tautologique de demi-droites

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & & \downarrow \pi \\ & & S^+Y \end{array}$$

ayant pour fibre au-dessus de  $[v] \in S^+Y$  représenté par  $v \in N_{int}Y \setminus Y$  la demi-droite

$$\pi^{-1}([v]) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset N_{int}Y.$$

En tant qu'ensembles, on a une identification  $\mathcal{V} = [N_{int}Y; Y]$  telle que l'application de contraction correspond à l'application naturelle

$$\begin{aligned} \text{ev} : \quad \mathcal{V} &\rightarrow N_{int}Y \\ ([v], \lambda v) &\mapsto \lambda v. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Or, clairement, en tant que fibré de demi-droites au-dessus d'une variété à bord,  $\mathcal{V}$  possède une structure lisse de variété à coins. On peut donc induire une structure lisse de variété à coins sur  $[X; Y]$  en collant  $S^+Y$  à  $X \setminus Y$  via l'application

$$c \circ \text{ev} : \mathcal{V} \rightarrow X,$$

où  $S^+Y \subset \mathcal{V}$  est vu comme la section nulle. Comme l'application de contraction  $\beta : [X; Y] \rightarrow X$  correspond à l'application (4.9) près de  $S^+Y$ , elle est lisse par rapport à la structure lisse de variété à coins de  $[X; Y]$ .

**Proposition 4.3.** *La structure lisse de variété à coins de  $[X; Y]$  ne dépend pas du choix de voisinage tubulaire (4.8).*

*Démonstration.* Si  $c_1$  et  $c_2$  sont deux voisinages tubulaires, alors dans un voisinage de

$$Y \subset N_{int}Y,$$

$c_2^{-1} \circ c_1$  induit un difféomorphisme qui se restreint à l'identité sur  $Y$ . En fait, il se relève en un difféomorphisme  $\widetilde{c_2^{-1} \circ c_1}$  dans un voisinage de la section nulle  $S^+Y$  de  $\mathcal{V}$  qui envoie  $S^+Y$  difféomorphiquement sur lui-même.

Ainsi, si  $[X; Y]_1$  et  $[X; Y]_2$  dénotent les variétés à coins lisses obtenues à l'aide des voisinages tubulaires  $c_1$  et  $c_2$ , cela montre que l'application  $\text{Id} : X \setminus Y \rightarrow X \setminus Y$  se prolonge de façon unique en un difféomorphisme

$$[X; Y]_1 \cong [X; Y]_2.$$

□

Le bord de la variété éclatée  $[X; Y]$  se décompose en deux hypersurfaces bordantes de codimension 1, à savoir la face frontale  $\text{ff} = \beta^{-1}(Y)$  correspondant à l'image inverse de la sous-variété  $Y$  le long de laquelle on éclate, et  $\beta^{-1}(\partial X \setminus Y)$  dont l'intersection avec  $\text{ff}$  correspond à un coin de codimension 2 de  $[X; Y]$ .

Si on revient au noyau de la chaleur sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut utiliser la notion d'éclatement pour décrire son comportement à la limite  $t \searrow 0$ .

**Proposition 4.4.** *Soit*

$$\text{EC}(\mathbb{R}^n) = [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty)_{\sqrt{t}}, \mathfrak{D}_{\mathbb{R}^n} \times \{0\}]$$

*l'espace obtenu en éclatant la diagonale  $\mathfrak{D}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  en  $\sqrt{t} = 0$ . Alors le noyau de la chaleur admet un développement polynomial sur la face frontale et décroît rapidement sur l'autre face. De plus,*

$$t^{\frac{n}{2}} K_t(x, y) \in \mathcal{C}^\infty(\text{EC}(\mathbb{R}^n))$$

*est en fait une fonction lisse.*

*Démonstration.* Le cas  $n = 1$  a déjà été traité. le cas  $n > 1$  se traite de façon similaire, c'est-à-dire qu'il suffit de considérer les coordonnées sphériques

$$y, \omega = \frac{x - y}{|x - y|} \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n, \quad r = \sqrt{|x - y|^2 + t}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{|x - y|}{\sqrt{t}}\right) \in [0, \frac{\pi}{2}]. \quad (4.10)$$

On a alors que

$$x - y = \omega r \sin \theta \implies \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} = \frac{e^{-\frac{\tan^2 \theta}{4}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} (r \cos \theta)^n},$$

d'où le résultat. □

## 4.2 Équation de la chaleur sur une variété riemannienne fermée

Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne fermée et soit  $E \rightarrow X$  un fibré vectoriel. Soit

$$P : \mathcal{C}^\infty(X; E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X; E)$$

un opérateur différentiel d'ordre 2 ayant pour symbole principal

$$\sigma_2(P)(\xi) = |\xi|_g^2.$$

En particulier, c'est un opérateur elliptique. On supposera aussi que pour un choix de métrique hermitienne  $h$  pour le fibré  $E$ , l'opérateur  $E$  est formellement auto-adjoint par rapport au produit scalaire  $L^2$  induit par  $g$  et  $h$ . Enfin, on supposera que le spectre de  $P$  est positif.

**Exemple 4.5.** Si  $X$  est orientée et  $E = \Lambda^*(T^*X)$ , alors le laplacien de Hodge est un exemple d'un tel opérateur par la preuve du Lemme 3.44 et l'Exemple 3.55.

**Exemple 4.6.** Si  $\nabla^E$  est une dérivée covariante compatible avec la métrique hermitienne  $h$  au sens où

$$dh(e_1, e_2) = h(\nabla^E e_1, e_2) + h(e_1, \nabla^E e_2),$$

alors le laplacien  $\Delta^E$  de l'Exemple 3.39 est formellement auto-adjoint avec un spectre positif, voir par exemple [BGV04, Corollaire 2.10 et Proposition 2.9].

Sur  $X$ , on considère l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -Pu, & u \text{ une section de } E \text{ au-dessus de } X \times [0, \infty), \\ u|_{X \times \{0\}} = u_0 \in L^2(X; E), & (\text{conditions initiales}). \end{cases} \quad (4.11)$$

**Proposition 4.7.** *L'équation (4.11) possède une unique solution  $u$  telle que*

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, Pu \in L^2(X; E)$$

pour tout  $t > 0$  et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u - u_0\|_{L^2} = 0.$$

De plus, pour  $t > 0$ , la solution est lisse.

*Démonstration.* D'abord, si  $\Pi_\lambda$  est la projection orthogonale par rapport à l'espace propre de  $\lambda \in \text{Spec}(P)$  par rapport à la décomposition spectrale du Théorème 3.36 appliquée à  $P$ , alors

$$u = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(P)} e^{-t\lambda} \Pi_\lambda u_0 \quad (4.12)$$

est une solution de l'équation de la chaleur de la forme voulue. En particulier, pour voir que  $u$  est bien lisse pour  $t > 0$ , remarquons que

$$P^k u = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(P)} \lambda^k e^{-t\lambda} \Pi_\lambda u_0 \in L^2(X; E) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

donc par régularité elliptique

$$u \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} L^2_{2k}(X; E) = \mathcal{C}^\infty(X; E).$$

De plus, comme  $\frac{\partial}{\partial t}$  commute avec  $P$  et que  $\frac{\partial u}{\partial t} = -Pu$ , on aura plus généralement que  $u$  est lisse aussi en  $t$  pour  $t > 0$ .

D'autre part, pour établir l'unicité de la solution, soient  $u_1$  et  $u_2$  deux telles solutions. Comme  $u_1 - u_2 \in L^2(X; E)$  et  $P(u_1 - u_2) \in L^2(X; E)$  on voit par la régularité elliptique que  $u_1 - u_2 \in L^2_2(X; E)$ . En utilisant le fait que  $P$  est formellement auto-adjoint et a un spectre positif, on a donc que pour  $t > 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 = -2 \langle u_1 - u_2, P(u_1 - u_2) \rangle_{L^2} \leq 0.$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0} \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 = 0$ , il faut donc par le théorème des accroissement finis que  $u_1 = u_2$ . □

Sous la forme (4.12), on voit que la solution est telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u - \Pi_0 u_0\|_{L^2} = 0, \quad (4.13)$$

plus précisément

$$\|u - \Pi_0 u_0\|_{L^2} = \mathcal{O}(e^{-t\lambda_1}) \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty, \quad (4.14)$$

où  $\lambda_1$  est la plus petite valeur propre strictement positive de  $P$ . Remarquons aussi que, même si  $u_0 \in L^2(X; E)$  n'est pas lisse, la solution  $u$  à l'équation de la chaleur devient



instantanément lisse pour  $t > 0$ . Pour mieux comprendre ce changement subit, il faut mieux comprendre la limite de la solution lorsque  $t \searrow 0$ . Pour ce faire, on peut construire la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, à savoir le noyau de la chaleur de l'opérateur  $P$ . Par (4.12), le noyau de la chaleur est donné par

$$e^{-tP} = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(P)} e^{-t\lambda} \Pi_\lambda$$

en termes de la décomposition spectrale de  $P$ . Pour décrire la limite lorsque  $t \searrow 0$ , remarquons qu'intuitivement, dans un système de coordonnées normales pour la métrique  $g$ , on peut s'attendre à ce qu'initialement, le noyau de la chaleur du laplacien sur  $\mathbb{R}^n$  soit une bonne approximation du noyau de la chaleur de  $P$ . En particulier, il est naturel de s'attendre à ce que ce noyau de la chaleur soit défini sur l'espace éclaté

$$\text{EC}(X) := [X \times X \times [0, \infty)_{\sqrt{t}}; \mathfrak{D}_X \times \{0\}],$$

où  $\mathfrak{D}_X \subset X \times X$  est la diagonale. Puisque ce sera effectivement l'espace sur lequel on pourra construire le noyau de la chaleur, on l'appellera **l'espace de la chaleur** de la variété  $X$ . Soit  $\beta : \text{EC}(X) \rightarrow X \times X \times [0, \infty)_{\sqrt{t}}$  l'application de contraction et considérons le fibré

$$\text{Hom}_{\text{EC}}(E, E) = \beta^*(\text{pr}_1^* E \otimes \text{pr}_2^* E^*) \rightarrow \text{EC}(X), \quad (4.15)$$

où  $\text{pr}_1 : X \times X \times [0, \infty)_{\sqrt{t}} \rightarrow X$  et  $\text{pr}_2 : X \times X \times [0, \infty)_{\sqrt{t}} \rightarrow X$  sont les projections sur le premier et le deuxième facteur.

Cela suggère de faire l'ansatz suivant. L'équation de la chaleur (4.11) possède un noyau de la chaleur  $K \in \mathcal{C}^\infty(X \times X \times (0, \infty)_{\sqrt{t}}; \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$  tel que :

(i) La solution  $u$  de l'équation de la chaleur (4.11) est donnée par

$$u(x, t) = \int_X K(x, y, t) u_0(y) dg(y);$$

(ii)  $t^{\frac{n}{2}} K \in \mathcal{C}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ .

En tant que variété à coins, l'espace de la chaleur  $\text{EC}(X)$  possède deux hypersurfaces bordantes, à savoir la face créée par l'éclatement de  $\mathfrak{D}_X \times \{0\}$ , qu'on dénotera  $\text{ft}$  et qu'on appellera la **face temporelle**, et la face

$$\text{bt} = \overline{\beta^{-1}((X \times X \setminus \mathfrak{D}_X) \times \{0\})},$$

le **bord temporel** de  $\text{EC}(X)$ , qui correspond au relèvement du bord de  $X \times X \times [0, \infty)_{\sqrt{t}}$  à l'espace de la chaleur  $\text{EC}(X)$ .

Comme pour le noyau de la chaleur sur  $\mathbb{R}^n$ , on va aussi supposer dans notre ansatz que la série de Taylor du noyau de la chaleur de  $P$  est triviale au bord temporel  $\text{bt}$ , c'est-à-dire que le noyau de la chaleur  $K$  et toutes ses dérivées s'annulent en  $\text{bt}$ . Pour que  $K$  soit un noyau de la chaleur, il faut aussi que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{O}_{K_t}(f_0) = f_0 \in L^2(X; E) \text{ pour } f_0 \in \mathcal{C}^\infty(X; E), \\ (t\partial_t + t\Delta)\mathcal{O}_{K_t}(f_0) = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

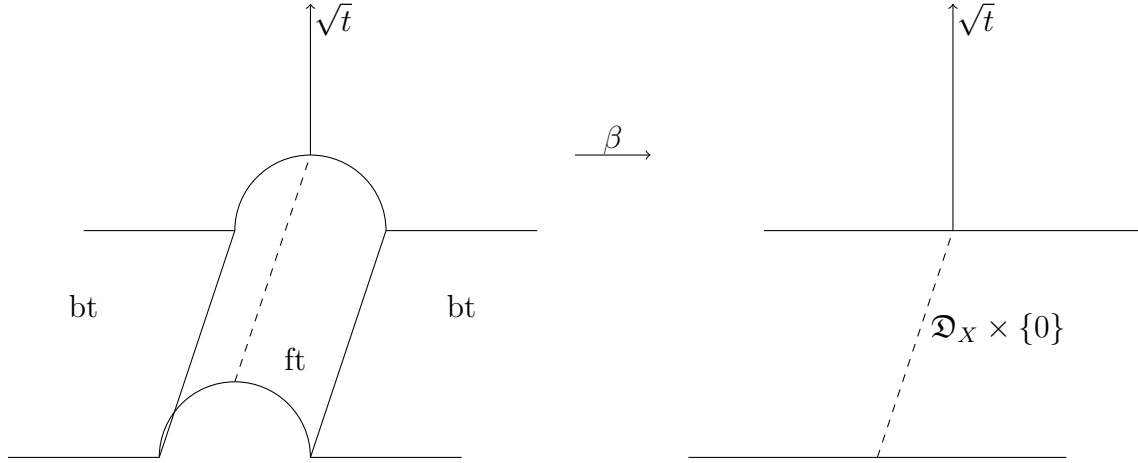


FIGURE 3 – L'espace de la chaleur  $EC(X)$

où  $\mathcal{O}_{K_t}$  est la famille d'opérateurs associée au noyau  $K$  et paramétrée par  $\sqrt{t}$ . Remarquons que dans l'équation (4.16), on a multiplié l'équation de la chaleur par  $t$ , ce qui ne change pas la nature de l'équation, mais aura l'avantage comme on le verra de simplifier certains calculs.

En nous appuyant sur cet ansatz, voici la stratégie que nous suivrons pour construire le noyau de la chaleur :

- Étape 1 :** On déterminera d'abord formellement le terme d'ordre 0 de  $t^{\frac{n}{2}}K$  en  $ft$  en utilisant (4.16) ;
- Étape 2 :** En procédant par récurrence, on pourra alors déterminer complètement la série de Taylor de  $K$  en  $ft$  ;
- Étape 2 :** On utilisera ensuite le lemme de Borel pour obtenir un noyau de la chaleur approximatif  $\tilde{K}$  ayant la bonne série de Taylor en  $ft$  ;
- Étape 3 :** Le terme d'erreur de  $\tilde{K}$  pourra enfin être éliminé en utilisant une sommation de Neumann.

**Étape 1 :** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  des coordonnées locales sur  $X$ . Sans perte de généralité, on peut supposer qu'au-dessus de la carte associée à ces coordonnées, le fibré  $E$  est trivial. Alors  $x, x', \tau = \sqrt{t}$  sont des coordonnées locales sur  $X \times X \times [0, \infty)_\tau$  près de

$$\mathfrak{D}_X \times \{0\} = \{(x, x', \tau) \mid x = x', \tau = 0\},$$

où  $x$  et  $x'$  dénotent les coordonnées  $x$  sur le premier et le deuxième facteur de  $X \times X \times [0, \infty)$ . On obtient alors des coordonnées locales près de  $ft$ , mais loin de  $bt$ , en posant

$$x, \quad \zeta = \frac{x' - x}{\tau}, \quad \tau.$$

Dans ces coordonnées et en traitant  $x$  et  $\tau$  comme des paramètres fixés, on a que

$$\beta^*(dx') = d(\tau\zeta + x) = \tau^n d\zeta, \quad \text{où} \quad dx' = dx'_1 \cdots dx'_n, \quad d\zeta = d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

On peut alors écrire

$$Kdg(x') = K \left| \frac{dg(x')}{dx'} \right| dx' = K \left| \frac{dg(x')}{dx'} \right| \tau^n d\zeta = kd\zeta$$

avec

$$k = K \left| \frac{dg(x')}{dx'} \right| \tau^n \in \mathcal{C}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E)).$$

**Remarque 4.8.** Sur  $\text{EC}(X)$ , la singularité du noyau de la chaleur en  $\sqrt{t} = 0$  disparaît dès lors qu'on écrit la densité  $dg$  en termes d'une densité sur  $\text{EC}(X)$ .

Pour  $e$  une section de  $E$  dans l'ouvert où les coordonnées  $x$  sont valides, on a alors que

$$\mathcal{O}_{K_{\tau^2}}(e)(x) = \int k(x, \zeta, \tau) e(x + \tau\zeta) d\zeta,$$

donc que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{O}_{K_{\tau^2}}(e)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, \zeta, 0) e(x) d\zeta = \left( \int_{\mathbb{R}^n} k(x, \zeta, 0) d\zeta \right) e(x).$$

Pour satisfaire aux conditions initiales de l'équation de la chaleur, c'est-à-dire pour que  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{O}_{K_{\tau^2}}(e)(x) = e(x)$ , il faut donc que

$$\int_{\mathbb{R}^n} k(x, \zeta, 0) d\zeta = \text{Id}_E. \quad (4.17)$$

Calculons d'autre part  $(t\partial_t + tP)\mathcal{O}_{K_t}(e) = (\frac{1}{2}\tau\partial_\tau + \tau^2P)\mathcal{O}_K(e)$  lorsque restreint sur la face temporelle  $ft$ , c'est-à-dire lorsque  $\tau = 0$  dans nos coordonnées locales sur  $\text{EC}(X)$ . D'abord, on a que

$$\begin{aligned} t\partial_t \mathcal{O}_{K_t}(e) &= \frac{1}{2}\tau\partial_\tau \mathcal{O}_{K_{\tau^2}}(e) = \frac{1}{2}\tau\partial_\tau \int k(x, \zeta, \tau) e(x + \tau\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int \tau(\partial_\tau k(x, \zeta, \tau)) e(x + \tau\zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \int k(x, \zeta, \tau) [\tau\partial_\tau e(x + \tau\zeta)] d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int \tau(\partial_\tau k(x, \zeta, \tau)) e(x + \tau\zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \int k(x, \zeta, \tau) [\zeta \cdot \partial_\zeta e(x + \tau\zeta)] d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \int ((\tau\partial_\tau - \zeta \cdot \partial_\zeta - n) k(x, \zeta, \tau)) e(x + \tau\zeta) d\zeta, \quad \text{en intégrant par parties,} \\ &= -\frac{1}{2} \int ((\zeta \cdot \partial_\zeta + n) k(x, \zeta, \tau)) e(x + \tau\zeta) d\zeta + \mathcal{O}(\tau). \end{aligned} \quad (4.18)$$

De même, on calcule que

$$\begin{aligned} \tau\partial_{x_i} \mathcal{O}_{K_{\tau^2}}(e) &= \int (\tau\partial_{x_i} k(x, \zeta, \tau)) e(x + \tau\zeta) d\zeta + \int k(x, \zeta, \tau) \tau\partial_{x_i} e(x + \tau\zeta) d\zeta \\ &= \tau \int (\partial_{x_i} k(x, \zeta, \tau)) e(x + \tau\zeta) d\zeta + \int (k(x, \zeta, \tau)) \partial_{\zeta_i} e(x + \tau\zeta) d\zeta \\ &= \int ((\tau\partial_{x_i} - \partial_{\zeta_i}) k(x, \zeta, \tau)) e(x + \tau\zeta) d\zeta, \quad \text{en intégrant par parties,} \\ &= - \int (\partial_{\zeta_i} k(x, \zeta, \tau)) e(x + \tau\zeta) d\zeta + \mathcal{O}(\tau). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Puisque par hypothèse le symbole principal de  $P$  est  $|\xi|_g^2$ , cela veut dire que dans nos coordonnées locales, où on peut supposer que  $E$  est trivial et muni de la dérivée covariante triviale,

$$P = -g^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} + a^j\partial_{x_j} + a^0, \quad (4.20)$$

où on utilise la convention qu'on somme sur les indices répétés. Ainsi, en usant de (4.18) et (4.19), on voit que

$$\left(\frac{1}{2}\tau\partial_\tau + \tau^2P\right)\mathcal{O}_K(e) = -\int\left(\left(\frac{1}{2}(\zeta\cdot\partial_\zeta + n) + g^{ij}\partial_{\zeta_i}\partial_{\zeta_j}\right)k(x,\zeta,\tau)\right)e(x+\tau\zeta)d\zeta + \mathcal{O}(\tau). \quad (4.21)$$

Or, comme il faut que  $(\frac{1}{2}\tau\partial_\tau + \tau^2P)\mathcal{O}_{K_{\tau^2}}(e) = 0$  pour que  $K$  soit bien un noyau de la chaleur, et ce, pour toute section  $e$  à support compact contenu dans notre système de coordonnées, on voit en prenant la limite  $\tau \rightarrow 0$  que  $K$  doit satisfaire à la condition suivante pour être un noyau de la chaleur,

$$\left(\frac{1}{2}(\zeta\cdot\partial_\zeta + n) + g^{ij}\partial_{\zeta_i}\partial_{\zeta_j}\right)k(x,\zeta,0) = 0. \quad (4.22)$$

Comme  $x$  est un paramètre dans cette équation,  $g = g(x)$  peut être vu comme une famille de métriques euclidiennes pour  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ . De plus, remarquons que  $\mathcal{R} := \zeta \cdot \partial\zeta$  est le champ de vecteurs radial induisant l'action infinitésimale correspondant à l'action naturelle de  $\mathbb{R}_{>0}$  sur  $\mathbb{R}^n$  par multiplication. Pour un point  $p \in X$  fixé, en choisissant nos coordonnées de sorte que  $p$  corresponde à  $x = x_0$  et que  $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}\}$  induise une base orthonormale de  $T_pX$ , on a alors que  $g^{ij}(x_0) = \delta^{ij}$  est le delta de Kronecker. Dans ces conditions, en prenant la transformée de Fourier en  $\zeta$  dans l'équation (4.22), on obtient que

$$(|\xi|^2 - \frac{1}{2}(-D_\xi) \cdot (i\xi) - \frac{n}{2})\hat{k} \implies (|\xi|^2 + \frac{1}{2}\xi \cdot \partial_\xi)\hat{k} = 0. \quad (4.23)$$

Or, la condition (4.17) implique qu'en  $\xi = 0$ ,

$$\hat{k}(x_0, 0, 0) = \text{Id}_{E_p}.$$

C'est une condition initiale pour l'équation différentielle ordinaire (4.23) spécifiant une unique solution

$$\hat{k}(x_0, \xi, 0) = e^{-|\xi|^2} \text{Id}_{E_p} \implies k(x_0, \zeta, 0) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\zeta|^2}{4}} \text{Id}_{E_p}. \quad (4.24)$$

Comme  $p$  était un point quelconque dans notre système de coordonnées, cela montre qu'il faut que

$$K(x, \zeta, 0)dg(x') = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\zeta|_{g(x)}}{4}} \text{Id}_E dg(\zeta), \quad \text{où } dg(\zeta) = \sqrt{|\det g_{ij}|} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n. \quad (4.25)$$

**Remarque 4.9.** Remarquons que  $K(x, \zeta, 0)$  est une fonction paire en  $\zeta$  au sens où

$$K(x, \zeta, 0) = K(x, -\zeta, 0).$$

L'équation (4.25) donne le premier terme de la série de Taylor du noyau de la chaleur sur la face temporelle ft. Dans les coordonnées  $x, \zeta, \tau$ , le bord temporel bt correspond à  $|\zeta| = \infty$ . La décroissance rapide de (4.25) lorsque  $|\zeta| \rightarrow \infty$  est donc cohérente avec notre hypothèse selon laquelle le noyau de la chaleur devrait avoir une série de Taylor triviale sur le bord temporel.

**Étape 2 :** Pour trouver les autres termes de la série de Taylor de  $k$  en ft, on applique l'opérateur  $t\partial_t + tP$  à sa série de Taylor

$$k(x, \zeta, \tau) \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} k_{\ell}(x, \zeta) \tau^{\ell}, \quad k_0(x, \zeta) = \frac{e^{-\frac{|\zeta|^2}{4}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

En utilisant (4.18), (4.19) and (4.20) et notre choix de  $k_0$ , on calcule que

$$(t\partial_t + tP)\mathcal{O}_{K_t}(e) \sim \sum_{\ell=1}^{\infty} \int \left[ \left( \frac{1}{2}(\ell - \zeta \cdot \partial\zeta - n) - g^{ij} \partial_{\zeta_i} \partial_{\zeta_j} \right) k_{\ell} + Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1} \right] \tau^{\ell} e(x + \tau\zeta) d\zeta, \quad (4.26)$$

où on a utilisé la convention que  $k_{-1} \equiv 0$  et où

$$Pk_{\ell-2}(x, \zeta) = (-g^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} + a^j \partial_{x_j} + a^0) k_{\ell-2}(x, \zeta),$$

et

$$Qk_{\ell-1}(x, \zeta) = (2g^{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{\zeta_j} - a^j(x) \partial_{\zeta_j}) k_{\ell-1}(x, \zeta).$$

Or, si  $K$  est un noyau de la chaleur, alors il faut que la série de Taylor (4.26) soit triviale, ce qui implique la relation de récurrence

$$\left( g^{ij} \partial_{\zeta_i} \partial_{\zeta_j} + \frac{1}{2}(\zeta \cdot \partial\zeta + n - \ell) \right) k_{\ell} = Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1}. \quad (4.27)$$

Par induction, on peut supposer que  $k_{\ell-2}$  et  $k_{\ell-1}$  sont déjà donnés et décroissent rapidement lorsque  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . En prenant nos coordonnées comme dans (4.23) pour prendre la transformée de Fourier en  $\zeta$ , cela donne

$$(|\xi|^2 + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\xi \cdot \partial_{\xi}) \hat{k}_{\ell} = -\mathcal{F}(Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1}), \quad (4.28)$$

c'est-à-dire que

$$\left( \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\xi \cdot \partial_{\xi} \right) e^{|\xi|^2} \hat{k}_{\ell} = -e^{|\xi|^2} \mathcal{F}(Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1}).$$

En posant  $r = |\zeta|$ , cette équation prend la forme

$$\frac{r}{2} \partial_r (e^{r^2} r^{\ell} \hat{k}_{\ell}) = -e^{r^2} r^{\ell} \mathcal{F}(Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1}),$$

ou de façon équivalente

$$\partial_r (e^{r^2} r^{\ell} \hat{k}_{\ell}) = -2e^{r^2} r^{\ell-1} \mathcal{F}(Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1}), \quad (4.29)$$

avec condition initiale  $e^{r^2} r^{\ell} \hat{k}_{\ell}|_{r=0} = 0$  puisque  $\ell \geq 1$ . En termes des coordonnées sphériques  $(\rho, \omega)$  correspondant à  $\xi$ , la solution de cette équation différentielle ordinaire est donc

$$\hat{k}_{\ell} = -\frac{2e^{-r^2}}{r^{\ell}} \int_0^r e^{\rho^2} \rho^{\ell-1} \mathcal{F}(Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1})(\rho, \omega) d\rho. \quad (4.30)$$

**Exercice 4.10.** En procédant par récurrence sur  $\ell$ , montrer les propriétés suivantes de la solution :

- a)  $\lim_{r \rightarrow 0} \hat{k}_\ell = -\frac{2}{\ell} \mathcal{F}(Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1})|_{r=0}$ ;  
b) La solution  $\hat{k}_\ell$  est lisse en  $\xi = 0$  avec série de Taylor

$$e^{r^2} \hat{k}_\ell \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(\omega)}{\ell + j} r^j \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{b_\alpha \xi^\alpha}{\ell + |\alpha|},$$

où les coefficients  $a_j$  sont tels que

$$-2e^{r^2} \mathcal{F}(Pk_{\ell-2} + Qk_{\ell-1}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\omega) r^j = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha \xi^\alpha;$$

- c) En termes de la variable  $\xi$ , on a que  $\hat{k}_\ell(x, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Ainsi, pour  $x$  fixé, l'équation (4.28) possède une unique solution  $\hat{k}_\ell \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Remarquons de plus que par unicité de la solution, on a l'implication

$$\begin{aligned} k_{\ell-2}(x, \zeta) = \pm k_{\ell-2}(x, -\zeta) \\ k_{\ell-1}(x, \zeta) = \mp k_{\ell-1}(x, -\zeta) \end{aligned} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n \quad \implies \quad k_\ell(x, \zeta) = \pm k_\ell(x, -\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n. \quad (4.31)$$

En procédant par récurrence sur  $\ell$ , on voit donc que la Remarque 4.9 implique que

$$k_\ell(x, \zeta) = (-1)^\ell k_\ell(x, -\zeta) \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0. \quad (4.32)$$

On peut résumer ce que nous avons obtenu jusqu'à présent par la proposition suivante.

**Proposition 4.11.** *L'équation (4.28) détermine formellement tous les coefficients  $k_\ell$  de ce que devrait être la série de Taylor de  $k$  à la face temporelle ft avec*

$$k_\ell(x, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad k_\ell(x, \zeta) = (-1)^\ell k_\ell(x, -\zeta) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Pour le noyau  $K$ , cela donne globalement

$$K(x, x', t) \sim \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \sum_{\ell=0}^{\infty} K_\ell$$

avec  $K_\ell = k_\ell \left| \frac{dx'}{dg(x')} \right|$  en coordonnées locales.

**Étape 3 :** Par le lemme de Borel, on peut trouver  $\tilde{K}$  tel que  $t^{\frac{n}{2}} \tilde{K} \in \mathcal{C}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$  avec  $t^{\frac{n}{2}} \tilde{K}$  ayant une série de Taylor triviale sur le bord temporel bt et une série de Taylor sur la face temporelle ft spécifiée par la Proposition 4.11. La famille d'opérateurs associés agissant sur  $L^2(X; E)$  est donnée par

$$\mathcal{O}_{\tilde{K}_t}(e)(x) = \int_X \tilde{K}(x, x', t) e(x') dg(x').$$

Par notre choix de  $\tilde{K}$ , on a que

$$(t\partial t + tP) \circ \mathcal{O}_{\tilde{K}_t} = \mathcal{O}_{\tilde{R}_t},$$

avec  $\tilde{R} \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ , où

$$\dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E)) \subset \mathcal{C}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$$

est le sous-espace des sections lisses ayant des séries de Taylor triviales en ft et bt.

**Étape 4 :** Pour se débarrasser du terme d'erreur  $\mathcal{O}_{\tilde{R}_t}$ , il est préférable de le faire agir par convolution sur  $\dot{\mathcal{C}}^\infty(X \times [0, \infty); E)$ , l'espace de sections lisses de  $E$  au-dessus de  $X \times [0, \infty)$  ayant une série de Taylor triviale en  $t = 0$ . Pour  $R \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ , on définit l'opérateur

$$R* : \dot{\mathcal{C}}^\infty(X \times [0, \infty); E) \rightarrow \dot{\mathcal{C}}^\infty(X \times [0, \infty); E)$$

par

$$(R * u)(t) = \int_0^t \mathcal{O}_{R_{t-s}}(u(s)) ds.$$

**Proposition 4.12.** *Pour tout  $R \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ , l'opérateur*

$$\text{Id} - R* : \dot{\mathcal{C}}^\infty(X \times [0, \infty); E) \rightarrow \dot{\mathcal{C}}^\infty(X \times [0, \infty); E)$$

*est inversible avec inverse de la forme  $\text{Id} - S*$  pour un certain  $S \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ .*

*Démonstration.* Pour  $A, B \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ , on a  $(A*)(B*) = C*$  avec  $C$  donné par

$$C(x, x', t) = \int_0^t \int_X A(x, x'', t-s) B(x'', x', s) dg(x'') ds.$$

Clairement,  $C \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E)) = \dot{\mathcal{C}}^\infty(X \times X \times [0, \infty); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ . De plus, si

$$\sup_{x, x'} |A(x, x', t)| \leq L \frac{t^k}{k!} \quad \text{et} \quad \sup_{x, x'} |B(x, x', t)| \leq C_0 \quad \forall t < T,$$

alors on peut montrer que

$$\sup_{x, x'} |C(x, x', t)| \leq L' L C_0 \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t < T,$$

où  $L'$  est une constante ne dépendant que de  $L$ ,  $C_0$  et de la forme volume  $dg$ , mais pas de  $k \in \mathbb{N}_0$ . En procédant par induction et en partant du fait que  $|R(x, x', t)| \leq C_0$  pour  $t < T$ , on peut donc montrer que

$$(R*)^{j+1} = R_{j+1} * \quad \text{avec} \quad \sup_{x, x'} |R_{j+1}(x, x', t)| \leq (L' C_0)^j C_0 \frac{t^j}{j!} \quad \forall t < T.$$

La série  $\sum_{j=0}^{\infty} R_j = \text{Id} + \sum_{j=1}^{\infty} R_j = \text{Id} - S$  converge donc. On peut obtenir des estimations similaires pour les dérivées, de sorte que  $S \in \dot{C}^{\infty}(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ . On a donc que

$$(\text{Id} - R_*)^{-1} = \text{Id} + \sum_{j=1}^{\infty} R_j * = \text{Id} - S*,$$

d'où le résultat. □

**Théorème 4.13.** *L'équation de la chaleur (4.11) possède un noyau de la chaleur  $e^{-tP} = \mathcal{O}_{K_t}$  avec  $t^{\frac{n}{2}} K \in \mathcal{C}^{\infty}(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$  décroissant rapidement en bt avec*

$$K \sim \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \sum_{\ell=0}^{\infty} K_{\ell}, \quad K_{\ell} \in \dot{C}^{\infty}(\text{ft}; \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E)) = \mathcal{S}^{-\infty}(TX; \text{Hom}(E, E))$$

tel que

$$K_{\ell}(x, \zeta) = (-1)^{\ell} K_{\ell}(x, -\zeta) \quad \text{et} \quad K_0(x, \zeta) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\zeta|_g^2(x)}{4}}.$$

*Démonstration.* Le noyau de la chaleur approximatif  $\tilde{K}$  de l'**Étape 3** satisfait à l'équation

$$(t\partial_t + tP)\mathcal{O}_{\tilde{K}_t} = \mathcal{O}_{\tilde{R}_t}, \quad \tilde{R} \in \dot{C}^{\infty}(\text{EC}(X); \text{Hom}(E, E)), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{O}_{\tilde{K}_t} = \text{Id}.$$

En termes d'opérateurs de convolution, cela donne

$$\begin{aligned} (t\partial_t + tP)\tilde{K} * u &= (t\partial_t + tP) \int_0^t \mathcal{O}_{\tilde{K}_{t-s}}(u(s)) ds \\ &= t(\mathcal{O}_{\tilde{K}_0}(u(t))) + t \int_0^t \frac{\mathcal{O}_{\tilde{R}_{t-s}}(u(s))}{t-s} ds \\ &= t(\text{Id} - \tilde{A}*)u \quad \text{avec} \quad \tilde{A} = -\frac{\tilde{R}}{t}. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a que

$$(\partial_t + P)\tilde{K} * u = (\text{Id} - \tilde{A}*)u.$$

Soit  $(\text{Id} - S*)$  l'inverse de  $\text{Id} - \tilde{A}*$  avec  $S \in \dot{C}^{\infty}(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ . Alors il suffit de poser

$$K* = (\tilde{K}*)(\text{Id} - S*) = \tilde{K} * + (\tilde{K}*)(S*),$$

de sorte que

$$(\partial_t + P)K * u = u \quad \text{pour} \quad u \in \mathcal{C}^{\infty}(X \times [0, \infty); E).$$

En posant  $C* = (\tilde{K}*)(S*)$  avec

$$C(x, x', t) = \int_0^t \int_X \tilde{K}(x, x'', t-s) S(x'', x', s) dg(x'') ds,$$



on voit que

$$\mathcal{O}_{C_t} = \int_0^t \mathcal{O}_{\tilde{K}_{t-s}} \circ \mathcal{O}_{S_s} ds \in \Psi^{-\infty}(X; E) \quad \forall t.$$

Comme  $\mathcal{O}_{S_s}$  décroît rapidement lorsque  $s \rightarrow 0$  et  $\mathcal{O}_{\tilde{K}_t}$  est borné dans  $\Psi^0(X; E)$  en utilisant la topologie de  $\Psi^\epsilon(X; E)$ , on voit que  $\mathcal{O}_{C_t} \rightarrow 0$  rapidement dans  $\Psi^{-\infty}(X; E)$ , donc que  $C \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ . Ainsi,  $K - \tilde{K} = C \in \dot{\mathcal{C}}^\infty(\text{EC}(X); \text{Hom}_{\text{EC}}(E, E))$ , ce qui signifie que  $K$  et  $\tilde{K}$  ont la même série de Taylor sur la face temporelle ft. En particulier, on a aussi que  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{O}_{K_t} = \text{Id}$  dans  $\Psi^\epsilon(X; E)$  pour  $\epsilon > 0$ . Finalement, on voit que

$$(\partial_t + P)K * u = u.$$

Comme

$$\begin{aligned} (\partial_t + P)K * u &= (\partial_t + P) \int_0^t \mathcal{O}_{K_{t-s}}(u(s)) ds = \mathcal{O}_{K_0}(u(t)) + \int_0^t (\partial_t + P)\mathcal{O}_{K_{t-s}}(u(s)) ds \\ &= u(t) + \int_0^t (\partial_t + P)\mathcal{O}_{K_{t-s}}(u(s)) ds \end{aligned}$$

et puisque que  $u \in \mathcal{C}^\infty(X \times [0, \infty); E)$  est quelconque, il faut donc que

$$(\partial_t + P)K_t = 0.$$

Le résultat découle alors de cette propriété et du fait que  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{O}_{K_t} = \text{Id}$ .  $\square$

On peut utiliser le noyau de chaleur pour donner une autre preuve de l'existence d'une solution de l'équation de la chaleur. Profitons-en pour considérer la version inhomogène de cette équation.

**Corollaire 4.14.** *Pour  $f \in \mathcal{C}^\infty(X \times [0, \infty); E)$  et  $u_0 \in L^2(X; E)$ , l'équation*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Pu = f, & u \text{ une section de } E \text{ au-dessus de } X \times [0, \infty), \\ u|_{X \times \{0\}} = u_0, & (\text{conditions initiales}). \end{cases} \quad (4.33)$$

*possède une unique solution*

$$u = e^{-tP} u_0 + e^{-tP} * f$$

*telle que*

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, Pu \in L^2(X; E)$$

*pour tout  $t > 0$  et*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u - u_0\|_{L^2} = 0.$$

*De plus, pour  $t > 0$ , la solution est lisse.*

*Démonstration.* L'existence est une conséquence directe de l'existence du noyau de la chaleur. Pour l'unicité, on peut procéder comme avant. Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions lisses, alors

$$\frac{d}{dt} \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 = -2 \langle u_1 - u_2, P(u_1 - u_2) \rangle_{L^2} \leq 0.$$

Comme  $(u_1 - u_2)|_{t=0} = u_0 - u_0 = 0$ , on voit par le théorème des accroissements finis que  $u_1 = u_2$  pour tout  $t$ .  $\square$

**Corollaire 4.15.** Pour  $t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , on a que  $e^{-(t+s)P} = e^{-tP} \circ e^{-sP}$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence de l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur, et donc de l'unicité du noyau de la chaleur.  $\square$

### 4.3 Les opérateurs de classe trace

La notion de trace pour des applications linéaires sur des espaces vectoriels de dimensions finies se généralise à certaines applications linéaires continues sur un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  de dimension infinie. Rappelons qu'un tel espace admet une **base hilbertienne**, à savoir une suite  $\{e_j\}$  d'éléments de  $\mathcal{H}$  telle que

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

et de sorte que le sous-espace vectoriel engendré par cette suite soit dense dans  $\mathcal{H}$ .

**Définition 4.16.** Une application linéaire continue  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est de **Hilbert-Schmidt** si

$$\|A\|_{\text{HS}}^2 := \sum_{i,j} |\langle Ae_i, e_j \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \sum_i \|Ae_i\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$$

pour  $\{e_i\}$  un choix de base hilbertienne, où  $\|\cdot\|_{\text{HS}}$  dénote la **norme de Hilbert-Schmidt**.

En posant,  $A_{ij} := \langle Ae_j, e_i \rangle_{\mathcal{H}}$ , on a que la norme Hilbert-Schmidt

$$\|A\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{i,j} |A_{ij}|^2$$

peut être vu comme la norme  $L^2$  de  $A$  vue comme une application

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (i, j) &\mapsto A_{ij}. \end{aligned}$$

de ce point de vue, l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt est un espace de Hilbert avec produit scalaire hermitien

$$\langle A, B \rangle_{\text{HS}} = \sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j \rangle_{\mathcal{H}} \overline{\langle Be_i, e_j \rangle_{\mathcal{H}}} = \sum_i \langle Ae_i, Be_i \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (4.34)$$

Remarquons en particulier que si  $A$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors son adjoint  $A^*$  est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt avec  $\|A^*\|_{\text{HS}} = \|A\|_{\text{HS}}$ .

**Lemme 4.17.** La norme de Hilbert-Schmidt et le produit scalaire de Hilbert-Schmidt ne dépendent pas du choix de base hilbertienne.

*Démonstration.* Si  $A$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt et  $\{f_j\}$  est un autre choix de base hilbertienne, alors

$$\|A\|_{\text{HS}}^2 = \sum_i \|Ae_i\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i,j} |\langle Ae_i, f_j \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \sum_{i,j} |\langle e_i, A^* f_j \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \sum_j \|A^* f_j\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.35)$$

ce qui montre que le terme de gauche ne dépend pas du choix de base hilbertienne  $\{e_i\}$ . En particulier, si  $B$  est un autre opérateur de Hilbert-Schmidt, alors par (4.35),

$$\sum_{i,j} |\langle Ae_i, f_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle f_j, Be_i \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j} (|\langle Ae_i, f_j \rangle_{\mathcal{H}}|^2 + |\langle Be_i, f_j \rangle_{\mathcal{H}}|^2) = \frac{1}{2} (\|A\|_{\text{HS}}^2 + \|B\|_{\text{HS}}^2). \quad (4.36)$$

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle_{\text{HS}} &= \sum_i \langle Ae_i, Be_i \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_i \sum_j \langle Ae_i, f_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle f_j, Be_i \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_j \sum_i \langle Ae_i, f_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle f_j, Be_i \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \text{car la convergence est absolue par (4.36),} \\ &= \sum_j \sum_i \langle e_i, A^* f_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle B^* f_j, e_i \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_j \langle B^* f_j, A^* f_j \rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

ce qui montre à nouveau que le terme de droite ne dépend pas du choix de la base hilbertienne  $\{e_i\}$ .  $\square$

**Définition 4.18.** Un opérateur linéaire continu  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est **de classe trace** si

$$\|A\|_{\text{Tr}} := \sup \sum_j |\langle Af_j, e_j \rangle_{\mathcal{H}}| < \infty,$$

où le supremum est pris sur toutes les paires de bases hilbertiennes  $\{e_i\}$  et  $\{f_i\}$  de  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 4.19.** *Un opérateur linéaire continue  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est de classe trace si et seulement si  $T = AB$  pour  $A$  et  $B$  des opérateurs de Hilbert-Schmidt.*

*Démonstration.*  $\Leftarrow$ ) Si  $T = AB$  avec  $A$  et  $B$  des opérateurs de Hilbert-Schmidt, alors

$$\begin{aligned} \|T\|_{\text{Tr}} &= \|AB\|_{\text{Tr}} = \sup \sum_j |\langle ABf_j, e_i \rangle_{\mathcal{H}}| = \sup \sum_j |\langle Bf_j, A^* e_j \rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \sup \left( \sum_j \|Bf_j\|_{\mathcal{H}} \|A^* e_j\|_{\mathcal{H}} \right) \leq \sup \left( \sum_j \|Bf_j\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_j \|A^* e_j\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.38) \\ &= \|B\|_{\text{HS}} \|A^*\|_{\text{HS}} = \|B\|_{\text{HS}} \|A\|_{\text{HS}} < \infty. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ) Soit  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur de classe trace et considérons l'opérateur auto-adjoint  $Q = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ . Son image est dense sur le complément orthogonal  $(\ker Q)^{\perp}$  de son noyau. Comme

$$\|Tf\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle T^*Tf, f \rangle_{\mathcal{H}} = \|Qf\|_{\mathcal{H}}^2,$$

l'application  $Qf \mapsto Tf$  est une isométrie, donc sa fermeture induit une isométrie

$$U : \ker Q^{\perp} \rightarrow \mathcal{H}_1,$$

où  $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$  est la fermeture de l'image de  $T$  dans  $\mathcal{H}$ . Ainsi, si  $\{e_j\}$  est une base hilbertienne de  $(\ker Q)^\perp$ , alors  $f_j = Ue_j$  est une base hilbertienne de  $\mathcal{H}_1$ , de sorte que

$$\sum_j |\langle Qe_j, e_j \rangle_{\mathcal{H}}| = \sum_j \langle UQe_j, Ue_j \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_j |\langle Te_j, f_j \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|T\|_{\text{Tr}}.$$

En particulier, l'opérateur  $B := Q^{\frac{1}{2}}$  est de Hilbert-Schmidt, car du fait que  $\ker B = \ker Q = \ker T$ , on a que

$$\|B\|_{\text{HS}}^2 = \sum_j \|Be_j\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_j |\langle Qe_j, e_j \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|T\|_{\text{Tr}}.$$

D'autre part,  $A := (UB)$  sera aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt, car

$$\|A\|_{\text{HS}}^2 = \|UB\|_{\text{HS}}^2 = \sum_j \|UBe_j\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_j \|Be_j\|_{\mathcal{H}}^2 = \|B\|_{\text{HS}}^2.$$

Ainsi,

$$T = UQ = UB^2 = AB$$

est bien le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt. Remarquons que pour ces choix de  $A$  et  $B$ , on a que

$$\|A\|_{\text{HS}}\|B\|_{\text{HS}} = \|B\|_{\text{HS}}^2 \leq \|T\|_{\text{Tr}},$$

donc en fait  $\|A\|_{\text{HS}}\|B\|_{\text{HS}} = \|T\|_{\text{Tr}}$  par (4.38).  $\square$

**Définition 4.20.** Si  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est un opérateur de classe trace, alors sa **trace** est définie par

$$\text{Tr } T := \sum_i \langle Te_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}}$$

pour  $\{e_i\}$  un choix de base hilbertienne.

Clairement, on a l'estimation

$$|\text{Tr } T| \leq \|T\|_{\text{Tr}}.$$

Pour voir que la trace ne dépend pas du choix de base hilbertienne, il suffit d'invoquer le Lemme 4.17 et de remarquer que pour  $T = AB$  avec  $A$  et  $B$  des opérateurs de Hilbert-Schmidt, on a que

$$\text{Tr}(T) = \text{Tr}(AB) = \sum_i \langle AB e_i, e_i \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_i \langle B e_i, A^* e_j \rangle_{\mathcal{H}} = \langle B, A^* \rangle_{\text{HS}}. \quad (4.39)$$

Dans le cas où  $\mathcal{H} = L^2(X; E)$ , on peut donner une caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt en termes de leur noyau de Schwartz  $K_A$  tel que

$$Ae(x) = \int_X K_A(x, x') e(x') dg(x')$$

avec intégrale possiblement prise au sens des distributions. On aura besoin au préalable du Lemme suivant.

**Lemme 4.21.** Soit  $\{e_i\}$  une base hilbertienne de  $L^2(X; E)$  compatible avec la décomposition spectral de l'opérateur  $P$  au sens où  $Pe_i = \lambda_i e_i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Alors

$$e_j(x)\langle \cdot, e_i(x') \rangle_{L^2} \in \mathcal{C}^\infty(X \times X; \text{Hom}_{X^2}(E)) \subset L^2(X \times X; \text{Hom}_{X^2}(E)), \quad i, j \in \mathbb{N},$$

est une base hilbertienne de  $L^2(X \times X; \text{Hom}_{X^2}(E))$ .

*Démonstration.* Grâce à l'isomorphisme  $E^* \cong E$  induit par la métrique hermitienne  $h$ , il suffit de montrer que

$$e_i \boxtimes e_j = e_i(x)e_j(x') \in \mathcal{C}^\infty(X \times X; E \boxtimes E), \quad i, j \in \mathbb{N}$$

est une base hilbertienne de  $L^2(X \times X; E \boxtimes E)$ , où

$$E \boxtimes E = \text{pr}_1^* E \otimes \text{pr}_2^* E.$$

Si  $\mathcal{H}_1$  est le sous-espace vectorielle engendré  $\{e_i \boxtimes e_j\}$ , il faut montrer que la fermeture de  $\mathcal{H}_1$  correspond à  $L^2(X \times X; E \boxtimes E)$ . Autrement dit, il faut montrer que si  $u \in L^2(X \times X; E \boxtimes E)$  est orthogonal à  $\mathcal{H}_1$ , alors  $u = 0$ . Pour ce faire, procédons comme dans la preuve de [KFT74, Chapitre VI, §3, Théorème 1] et posons

$$u_j(x) = \int \langle u(x, x'), e_j(x') \rangle_h dg(x').$$

Par le théorème de Fubini, on a que  $u_j \in L^2(X; E)$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle u_j, e_i \rangle_{L^2} = \langle u, e_i \boxtimes e_j \rangle_{L^2} = 0,$$

puisque  $u$  est orthogonal à  $\mathcal{H}_1$  par hypothèse. Comme  $\{e_i\}$  est une base hilbertienne de  $L^2(X; E)$ , on en déduit que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $u_j(x) = 0$  presque partout. En particulier, cela signifie que pour presque tout  $x$ ,  $u(x, x') = 0$  pour presque tout  $x'$ , donc que  $u(x, x') = 0$  presque partout. Cela montre que  $u$  est nulle dans  $L^2(X \times X; E \boxtimes E)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 4.22.** Un opérateur linéaire continu  $A : L^2(X; E) \rightarrow L^2(X; E)$  est de Hilbert-Schmidt si et seulement si son noyau de Schwartz  $K_A$  est un élément de  $L^2(X \times X; \text{Hom}_{X^2}(E))$ , où

$$\text{Hom}_{X^2}(E) := \text{pr}_1^* E \otimes \text{pr}_2^* E^*$$

avec  $\text{pr}_j : X \times X \rightarrow X$  la projection sur le  $j$ -ième facteur. De plus, si  $B : L^2(X; E) \rightarrow L^2(X; E)$  est un autre opérateur de Hilbert-Schmidt, alors

$$\langle A, B \rangle_{\text{HS}} = \langle K_A, K_B \rangle_{L^2} = \int_{X \times X} \langle K_A(x, x'), K_B(x, x') \rangle_h dg(x) dg(x'),$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$  dénote le produit scalaire hermitien dans les fibres de  $\text{Hom}_{X^2}(E)$  induit par la métrique hermitienne  $h$  de  $E$ .

*Démonstration.* Cela découle du lemme précédent et du fait que

$$K_A(x, x') = \sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j \rangle_{\mathcal{H}} e_j(x) \langle \cdot, e_i(x') \rangle_{L^2}$$

pour  $\{e_i\}$  une base hilbertienne de  $L^2(X; E)$  induite par la décomposition spectral de l'opérateur  $P$ .  $\square$

**Remarque 4.23.** Cependant, bien que la norme  $\|\cdot\|_{\text{Tr}}$  s'apparente à une norme  $L^1$ , elle ne correspond pas à la norme  $L^1$  du noyau de Schwartz.

## 4.4 La trace du noyau de la chaleur

Les résultats précédents peuvent être appliqués au noyau de la chaleur de l'opérateur elliptique  $P$ .

**Corollaire 4.24.** *Pour  $t > 0$ , le noyau de la chaleur est de classe trace et de classe Hilbert-Schmidt. De plus,*

$$\text{Tr}(e^{-tP}) = \int_X \text{tr}_E(K_t(x, x)) dg(x).$$

*Démonstration.* Comme  $K_t \in \mathcal{C}^\infty(X \times X) \subset L^2(X \times X)$  pour  $t > 0$ , l'opérateur  $e^{-tP}$  est de Hilbert-Schmidt. Par le Corollaire 4.15, on a donc que

$$e^{-tP} = e^{-\frac{t}{2}P} e^{-\frac{t}{2}P}$$

est aussi de classe trace pour  $t > 0$ . Maintenant, puisque que

$$\begin{aligned} \langle e_i, e^{-tP} e_j \rangle_{L^2} &= \int_{X \times X} \langle e_i(x), K_t(x, x') e_j(x') \rangle_h dg(x') dg(x) \\ &= \int_{X \times X} \langle (K_t(x, x')^* e_i(x), e_j(x')) \rangle_h dg(x') dg(x), \end{aligned}$$

où  $(K_t(x, x'))^* \in \text{Hom}(E_x, E_{x'})$  est l'adjoint de  $K_t(x, x') \in \text{Hom}(E_{x'}, E_x)$  par rapport à la métrique hermitienne  $h$ , on voit que le noyau de Schwartz de  $(e^{-tP})^*$  est donné par

$$(e^{-tP})^* e(x) = \int_X (K_t(x', x))^* e(x') dg(x').$$

D'autre part, pour  $a, b \in \text{Hom}(E_{x'}, E_x)$ , remarquons que le produit scalaire induit par la métrique hermitienne  $h$  est donné par

$$\langle a, b \rangle_h = \text{tr}_{E_x}(ab^*)$$

où  $b^*$  est l'adjoint de  $b$  par rapport à la métrique hermitienne  $h$ . Par le Proposition 4.22, la trace de l'opérateur de la chaleur  $e^{-tP}$  est donc donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(e^{-tP}) &= \mathrm{Tr}(e^{-\frac{t}{2}P} e^{-\frac{t}{2}P}) = \langle e^{-\frac{t}{2}P}, (e^{-\frac{t}{2}P})^* \rangle_{\mathrm{HS}} \\
&= \int_{X \times X} \langle K_{\frac{t}{2}}(x, x'), K_{\frac{t}{2}}(x', x)^* \rangle_h dg(x) dg(x') \\
&= \int_{X \times X} \mathrm{tr}_E(K_{\frac{t}{2}}(x, x') \circ K_{\frac{t}{2}}(x', x)) dg(x) dg(x') \\
&= \int_X \mathrm{tr}_E \left( \int_X K_{\frac{t}{2}}(x, x') \circ K_{\frac{t}{2}}(x', x) dg(x') \right) dg(x) \\
&= \int_X \mathrm{tr}_E(K_t(x, x)) dg(x), \quad \text{par le Corollaire 4.15.}
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.25.** *La trace du noyau de la chaleur est telle que*

$$t^{\frac{n}{2}} \mathrm{Tr}(e^{-tP}) \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty)_t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}} \mathrm{Tr}(e^{-tP}) = \frac{\mathrm{Vol}(X, g)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{rg}(E).$$

*Démonstration.* Comme  $K_\ell(x, \zeta) = (-1)^\ell K_\ell(x, -\zeta)$  pour les termes  $K_\ell$  dans l'expansion du noyau de la chaleur en ft donnés par le Théorème 4.13, on a en particulier que

$$K_\ell(x, 0) = 0$$

pour  $\ell$  impair. Ainsi, puisque  $\mathrm{Tr}(e^{-tP}) = \int_X \mathrm{tr}_E(K_t(x, x)) dg(x)$ , on a que

$$\mathrm{Tr}(e^{-tP}) \sim \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell t^\ell \quad \text{avec} \quad a_\ell = \int_X \mathrm{tr}_E(K_{2\ell}(x, 0)) dg(x).$$

Comme  $\mathrm{tr}_E(K_0(x, 0)) = \frac{\mathrm{rg} E}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}$ , on a bien que  $a_0 = \frac{\mathrm{Vol}(X, g)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{rg} E$ .

□

Soit  $\Pi_+ : L^2(X; E) \rightarrow L^2(X; E)$  la projection orthogonale sur l'espace engendré par les espaces propres des valeurs propres strictement positives de  $P$ . On a que  $\Pi_+ = \mathrm{Id}_E - \Pi_0$  où  $\Pi_0 \in \Psi^{-\infty}(X; E)$  est la projection sur le noyau de  $P$ , donc  $\Pi_+ \in \Psi^0(X; E)$ .

**Proposition 4.26.** *Soit  $\lambda_1 > 0$  la plus petite valeur propre strictement positive de  $P$ . Alors il existe une constante  $C(\ell)$  dépendant de  $\ell \in \mathbb{N}_0$  telle que*

$$\|k_+(\cdot, \cdot, t)\|_{\mathcal{C}^\ell} \leq C(\ell) e^{-\frac{t\lambda_1}{2}}, \quad \forall t \geq 3,$$

où  $k_+(\cdot, \cdot, t)$  est le noyau de Schwartz de  $\Pi_+ e^{-tP} \Pi_+$ .

*Démonstration.* Puisque  $\Pi_+ e^{-tP} \Pi_+ = e^{-\frac{P}{2}} \Pi_+ e^{-(t-1)P} \Pi_+ e^{-\frac{P}{2}}$ , on a que

$$k(x, x', t) = \int K(x, z_1, \frac{1}{2}) k_+(z_1, z_2, t-1) K(z_2, x', \frac{1}{2}) dg(z_1) dg(z_2).$$

Comme  $k(\cdot, \cdot, \frac{1}{2})$  est une fonction lisse, il suffit donc de borner la norme  $L^1$  de  $k_+(\cdot, \cdot, t-1)$  adéquatement, c'est-à-dire la norme  $L^2$  via l'inégalité de Hölder. Or, on calcule que

$$\begin{aligned} \|k_+(\cdot, \cdot, t-1)\|_{L^2}^2 &= \|\Pi_+ e^{-(t-1)P} \Pi_+\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(P) \setminus \{0\}} e^{-2(t-1)\lambda} \\ &\leq \left( \sum_{\lambda \in \text{Spec}(P) \setminus \{0\}} e^{-(t-2)\lambda} \right) e^{-t\lambda_1} \\ &\leq \left( \sum_{\lambda \in \text{Spec}(P)} e^{-\lambda} \right) e^{-t\lambda_1} \quad \text{pour } t \geq 3, \\ &= \left( \int_X \text{tr}_E(K(x, x, 1)) dg(x) \right) e^{-t\lambda_1}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|k_+(\cdot, \cdot, t-1)\|_{L^1} &\leq (\text{Vol}(X, g) \text{rg}(E))^{\frac{1}{2}} \|k_+(\cdot, \cdot, t-1)\|_{L^2} \\ &\leq \left( \text{Vol}(X, g) \text{rg} E \int_X \text{tr}_E(K(x, x, 1)) dg(x) \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t\lambda_1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Corollaire 4.27.** *Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on a que  $e^{-tP} \rightarrow \Pi_0$  exponentiellement rapidement.*

De même, on a le résultat suivant.

**Proposition 4.28.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $t \geq 1$ ,*

$$0 \leq \text{Tr}(e^{-tP}) - \dim(\ker P) \leq C e^{-t\lambda_1}.$$

*Démonstration.* On calcule que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-tP}) - \dim(\ker P) &= \sum_{\lambda \in \text{Spec}(P) \setminus \{0\}} e^{-t\lambda} = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(P) \setminus \{0\}} e^{-(t-\frac{1}{2})\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}} \\ &\leq e^{-t\lambda_1} e^{\frac{\lambda_1}{2}} \left( \text{Tr}(e^{-\frac{P}{2}}) - \dim(\ker P) \right), \end{aligned}$$

ce qui montre qu'on peut prendre  $C = e^{\frac{\lambda_1}{2}} (\text{Tr}(e^{-\frac{P}{2}}) - \dim(\ker P))$ . □

Le Corollaire 4.25 va nous permettre de dériver la loi de Weyl pour le spectre de l'opérateur  $P$ . On aura besoin du résultat suivant.



**Théorème 4.29** (Karamata). Soit  $d\mu(\lambda)$  une mesure positive sur  $(0, \infty)$  telle que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} d\mu(\lambda)$$

converge pour  $t > 0$  et

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \int e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) = C$$

pour certaines constantes  $\alpha > 0$  et  $C > 0$ . Dans ce cas, si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \int_0^\infty f(e^{-t\lambda}) e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(e^{-t}) t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

*Démonstration.* Par le théorème de Weierstrass, la fonction  $f$  peut être approximée par un polynôme. Il suffit donc d'établir le résultat pour  $f(x) = x^k$ . Dans ce cas, on calcule que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \int_0^\infty f(e^{-t\lambda}) e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) &= \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \int_0^\infty e^{-t(k+1)\lambda} d\mu(\lambda) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t(k+1))^\alpha}{(k+1)^\alpha} \int_0^\infty e^{-t(k+1)\lambda} d\mu(\lambda) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau^\alpha}{(k+1)^\alpha} \int_0^\infty e^{-\tau\lambda} d\mu(\lambda) = \frac{C}{(k+1)^\alpha}, \end{aligned}$$

alors que d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(e^{-t}) t^{\alpha-1} e^{-t} dt &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t(k+1)} t^{\alpha-1} dt = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\tau} \frac{\tau^{\alpha-1} d\tau}{(k+1)^\alpha} \\ &= \frac{C}{(k+1)^\alpha}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Soit

$$N_P(\lambda) = \sum_{\mu \leq \lambda, \mu \in \text{Spec } P} \dim E_\mu$$

le nombre de valeurs propres de  $P$  plus petites que  $\lambda$  comptées avec multiplicité, où  $E_\mu$  est l'espace propre de  $P$  associé à la valeur propre  $\mu$ .

**Corollaire 4.30** (Loi de Weyl). La fonction  $N_P(\lambda)$  est tel que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_P(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \frac{\text{Vol}(X, g) \text{rg } E}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

*Démonstration.* En prenant une suite de fonctions continues qui converge vers  $x^{-1}$  sur  $[e^{-1}, 1]$  et 0 sur  $[0, e^{-1})$  dans le théorème précédent, on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \int_0^{t^{-1}} d\mu(\lambda) = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

On prend alors

$$d\mu(\lambda) = \sum_{\nu \in \text{Spec}(P) \setminus \{0\}} \dim E_\nu \delta(\lambda - \nu) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{n}{2}.$$

D'un côté, on a que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}} \sum_{\nu \in \text{Spec}(P) \setminus \{0\}} e^{-t\nu} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}} (\text{Tr}(e^{-tP}) - \dim(\ker P)) \\ &= \frac{\text{Vol}(X; g)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \text{rg } E =: C. \end{aligned}$$

D'autre part, comme

$$N_P(\lambda) = \dim \ker P + \int_0^\lambda d\mu(\nu),$$

on en conclut que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_P(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{n}{2}} \int_0^{t^{-1}} d\mu(\lambda) = \frac{C}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\text{Vol}(X, g) \text{rg } E}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

□

Si  $\{\lambda_k\}$  est une suite croissante des valeurs propres de  $P$  comptées avec multiplicité, alors  $N_P(\lambda_k) = k$ , de sorte que la loi de Weyl peut être reformulée comme stipulant que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{k^{\frac{2}{n}}} = \frac{4\pi(\Gamma(\frac{n}{2}+1))^{\frac{2}{n}}}{\text{Vol}(X, g) \text{rg } E}, \quad (4.41)$$

c'est-à-dire que  $\lambda_k$  croît comme un multiple de  $k^{\frac{2}{n}}$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

**Exercice 4.31.** Soit  $\{e_k\}$  une base hilbertienne de  $L^2(X; E)$  compatible avec la décomposition spectrale de  $P$  au sens où

$$Pe_k = \lambda_k e_k.$$

Supposons aussi sans perte de généralité que  $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer alors qu'une section  $e \in L^2(X; E)$  est lisse si et seulement si sa décomposition

$$e = \sum_k a_k e_k$$

dans la base hilbertienne  $\{e_k\}$  est telle que la suite  $\{a_k\}$  converge vers 0 plus rapidement que  $k^{-m}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

## Références

- [Ati67] M.F. Atiyah, *K-theory*, Benjamin, 1967.
- [BGV04] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Bre05] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Sciences Sup, Dunod, 2005.
- [Hör90] L. Hörmander, *Linear partial differential operators I*, Springer, 1990.
- [KFT74] A. Kolmogorov, S. Fomine, and V. M. Tihomirov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Éditions Mir, Moscow, 1974, Avec un complément sur les algèbres de Banach, par V. M. Tikhomirov, Traduit du russe par Michel Dragnev. MR 367598
- [Mel] R.B. Melrose, *Introduction to microlocal analysis*, disponible en ligne : <http://www-math.mit.edu/~rbm/iml90.pdf>.
- [Mel93] ———, *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1993.

Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal  
Courriel: rochon.frederic@uqam.ca