Devoir I

Dû le mardi 15 février 2022

1. . Soit H l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que H est un groupe de Lie (c'est le groupe de Heisenberg).

(b) Donner une description de son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

(c) Montrer que l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{h} \to H$ est un difféomorphisme.

2. L'algèbres des quaternions $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre non commutative de dimension 4. En tant qu'espace vectoriel réel de dimension 4, elle admet une base constituée de l'unité $1 \in \mathbb{R}$ et de trois éléments i, j, k tels que

$$ij = k = -ji,\ ki = j = -ik,\ jk = i = -kj,\ i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Les éléments de $\mathbb{H}$ sont donc de la forme $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ pour $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$. On dénote par

$$\overline{q} := q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

le conjugué de q, et par $|q|$ la norme de q définie par

$$|q|^2 := \sum_{m=0}^{3} q_m^2.$$

La base $\{1, i, j, k\}$ nous permet d'identifier $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{R}^4$ en tant qu'espace vectoriel réel.

(a) Montrer que l'ensemble des quaternions unitaires défini par [1]

$$\mathbb{S}^3 = \{ q \in \mathbb{H} \quad | \quad |q| = 1 \}.$$

est un groupe de Lie avec opération de groupe induite par le produit de $\mathbb{H}$. (*Indice* : Montrer d'abord que $|q|^2 = q\overline{q}$ et $p \cdot q = \overline{\overline{q} \cdot \overline{p}}$ pour $p, q \in \mathbb{H}$.)

(b) Donner une description de l'algèbre de Lie de $\mathbb{S}^3$.

(c) Montrer que l'application

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mapsto \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - q_1 i \end{pmatrix}$$

induit un difféomorphisme $\Psi : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SU}(2)$ qui est en même temps un homomorphisme de groupes. En tant que groupes de Lie, $\mathbb{S}^3$ et $\mathrm{SU}(2)$ sont donc isomorphes.

1. La notation est choisie pour indiquer que $\mathbb{S}^3$ correspond à la sphère de dimension 3 sous l'identification $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

(d) Dénotons par $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) = \{q \in \mathbb{H} \mid q_0 = 0\} \cong \mathbb{R}^3$ l'espace des quaternions imaginaires. Montrer que $\mathbb{S}^3$ agit sur $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ par conjugaison,

$$\Phi(q)\xi := q\xi\overline{q}, \quad q \in \mathbb{S}^3, \xi \in \mathrm{Im}(\mathbb{H}).$$

(e) En utilisant l'identification $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{R}^3$, montrer que l'action précédente induit un homomorphisme de groupes $\Phi : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}(3)$.

(f) **(Exercice optionnel)** Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ est une submersion et une immersion.

(g) **(Exercice optionnel)** Montrer aussi que l'application Φ est surjective (pour ce faire, vous pouvez utiliser le fait que $\mathbb{S}^3$ et $\mathrm{SO}(3)$ sont compacts et connexes) et que $\Phi(q_1) = \Phi(q_2)$ si et seulement si $q_1 = \pm q_2$. Cela montre que $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ est un revêtement à deux feuillets du groupe $\mathrm{SO}(3)$. Le groupe $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ est aussi appelé le groupe spin de de dimension 3 et est dénoté $\mathrm{Spin}(3)$.

3. Soit G une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui est en même temps un groupe tel que l'opération de composition

$$\begin{array}{rccc} m: & G \times G & \to & G \\ & (g,h) & \mapsto & gh \end{array}$$

soit une application différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(a) Montrer que pour chaque $g \in G$, les applications $L_g : G \to G$ et $R_g : G \to G$ correspondant aux compositons à gauche et à droite par g sont des difféomorphismes.

(b) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} F: & G \times G & \to & G \times G \\ & (g,h) & \mapsto & (g,gh) \end{array}$$

est une bijection.

(c) Montrer de plus que la différentielle de F est en tout point surjective et injective. Cela permet de conclure par le théorème des fonctions inverses que l'application F est un difféomorphisme.

(d) En utilisant le résultat précédent, montrer que l'application $\gamma : G \to G$ qui à un élément $g \in G$ associe son inverse $\gamma(g) := g^{-1}$ est une application différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(e) Conclure que G est un groupe de Lie.